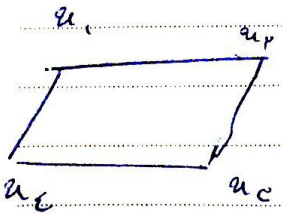
$x_{com} = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i}$ — مختصات مرکز جرم — $\frac{\sum A_i x_{ci}}{\sum A_i} = x_{com}$

@Setad_daneshgahi

Subject:
Day. Month. Year.

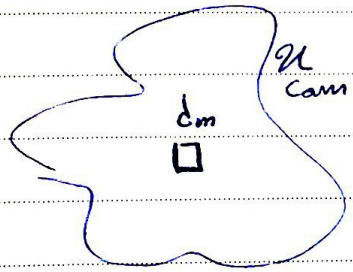


$$x_{com} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$y_{com} = \frac{y_1 m + y_2 m + y_3 m + y_4 m}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$\Delta m \to 0$ ، m_i

x_{com}



$$x_{com} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_M x\,dm}{M} \quad x_{com} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

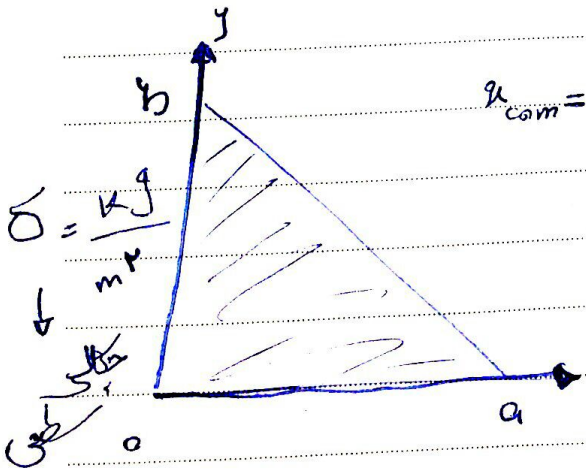
P V m

ρ dV dm

$\rho\,dV = dm$ — حجمی

$\sigma\,dA = dm$ — سطحی

$\lambda\,dl = dm$ — خطی



$$x_{com} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_a \sigma y\,dx}{\int dm}$$

Shuter

امیرحسین بابایی

@Setad_daneshgahi

$\sigma_A = M$

$\sigma\left(\frac{ba}{2}\right) = M$

$$\frac{\sigma \int_0^a x\left(b - \frac{b}{a}x\right) dx}{\frac{\sigma(ba)}{2}} \Rightarrow$$

← در مسائل اصل پایستگی دکانه باید رعایت شود.

← مرکز جرم:

$$x_{Com} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

توزیع سه بعدی ← $\vec{r}_{Com} \quad \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ (I)

جسم پیوسته ⟹ حل: $x_{Com} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$ (II)

حجمی

$\rho = \frac{dm}{dv} \rightarrow dm = \rho\, dv \Longrightarrow x_{Com} = \frac{\int x \rho\, dv}{\int \rho\, dv}$ (III)

→ $x_{Com} = \frac{\int x\, dv}{V}$ ★

اگر ρ ثابت باشد مختصات مرکز جرم به صورت زیر می‌آید.

→ حالت

سطحی: $\sigma = \frac{dm}{dA} \rightarrow dm = \sigma\, dA \rightarrow x_{com} = \frac{\int x \sigma\, dA}{\int \sigma\, dA}$ ★

خاصی از مختصات جسم

→ اگر σ ثابت

باشد: $x_{Com} = \frac{\int x\, dA}{A}$

$x_{Com} = \int x\, dA / A$

Shuter

@Setad_daneshgahi

طولی: $\lambda = \frac{dm}{dL} \rightarrow dm = \lambda dL \rightarrow x_{com} = \frac{\int x \lambda dL}{\int \lambda dL}$

$\rightarrow \lambda$ ثابت باشد $: x_{com} = \frac{\int x\, dL}{L}$

← اگر بتوان جسم را به n بخش تقسیم کرد ← مرکز جرم

$$x_{com} = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i}$$

← اگر چگالی ثابت باشد: $x_{com} = \frac{\sum A_i x_{ci}}{\sum A_i}$

$$\sum F_{ext} = M a_{com} \quad (I)$$

$$\vec{a}_{com} = \frac{m_1 \vec{a_1} + m_2 \vec{a_2}}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots = M v_{com} \rightarrow m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 + \dots = M V_{com}$$

$$\rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots = M a_{com} \rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_n = M a_{com} \quad (I)$$

← تکانه (اندازه حرکت)

$$P = m\vec{V} \rightarrow \begin{cases} P_x = m V_x \\ P_y = m V_y \end{cases} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

جرم ثابت $\rightarrow \sum F_{ext} = \frac{dP}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

@Setad_daneshgahi

برخورد کشسان:

- **دو یک بعدی الاستیک:**
  - از نظر جنبشی دستگاه پایسته می‌ماند.
  - اگر بسته و منزوی باشد تکانه خطی نیز پایسته می‌ماند.

برخورد ناکشسان غیرالاستیک دو یک بعدی

- جهت حرکت از نظر جنبشی حذف می‌شود.
- اگر دستگاه بسته و منزوی باشد تکانه خطی کل دستگاه پایسته است.

سینماتیک دورانی:

سرعت زاویه‌ای

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

ω_+ ↺

ω_- ↻

شتاب زاویه‌ای

$$\bar{a}_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$a = \frac{d\omega}{dt} \quad \left[rad/s^2\right]$$

حرکت خطی	حرکت زاویه‌ای
$v = at + v_0$	$\omega = \alpha t + \omega_0$
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$	$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$
$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$
$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$	$\Delta\theta = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\Delta t$

$$v = r\omega \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_t = r\alpha \qquad \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = a_r$$

شتاب مماسی (خطی) — شتاب شعاعی

سرعت خطی ← $v = r\omega$

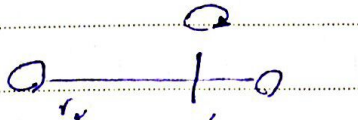
Shuter

@Setad_daneshgahi

Subject:
Day. Month. Year. ( )

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\begin{cases} \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{V} \end{cases}$, $a = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}$



لختی دورانی ← ستگاه ذرات اگسسته

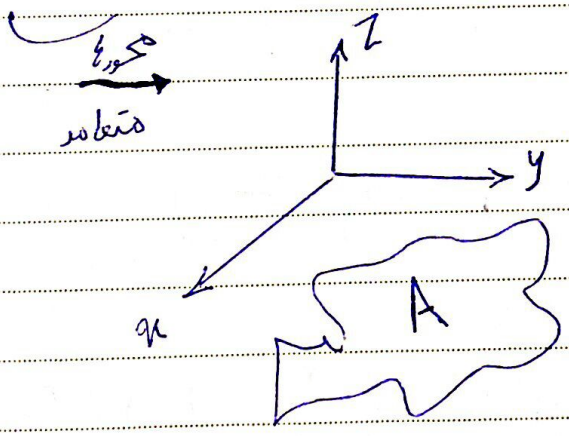
$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

$\boxed{I = \int r^2 dm}$ ← جسم حلب حالت پیوسته

محورهای موازی → $I_\Delta = I_{com} + Md^2$

I_Δ: هر محوری که خواستیم
M: جرم جسم
d: فاصله دو محور

محورهای متعامد



اگر جسم روی صفحه xy باشد

$I_z = I_x + I_y$

$I = \int dI$ ← لختی المان

$I = \sum_{i=1}^{n} I_i$

اجسام مرکب: $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$

Shuter

@Setad_daneshgahi

Subject:
Day. Month. Year. ( )

حلقه / استوانه

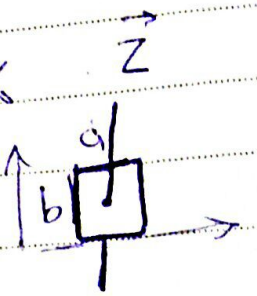
حلقه: حول محور مرکز: $I = MR^2$

حول قطر: $\frac{1}{2}MR^2$

استوانه

توپر حول محور مرکزی: $I = \frac{1}{2}MR^2$

مکعب مستطیل حول محور عمود و گذرنده از مرکز جرم

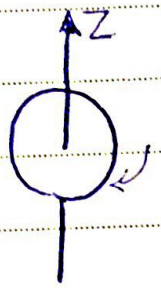


$$I_Z = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

$$= I_x + I_y$$

$$= \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{12}Mb^2$$

دیسک کامل



$$I_Z = \frac{1}{2}MR^2$$

حول قطر $\leftarrow I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$

@Setad_daneshgahi

Subject:
Day. Month. Year. ( )

$\tau = r \times F \quad rF\sin\theta \rightarrow \tau = r(F\sin\theta) \rightarrow F_T$ ①

$\tau = (r\sin\theta)F = r_\perp F \rightarrow r_\perp$ ②

① مولفه F_T $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است

② فاصله عمودی میان محور دوران و امتداد F (بازوی گشتاور)

$\sum \tau = I\alpha$ ($F = ma$) جایگزین کردن شتاب زاویه‌ای با خطی

$\alpha = \frac{a}{R}$ شتاب گلوله وقتی جاذبه‌ی چرخ!

$RT_B - RT_A = I\alpha$

انرژی جنبشی: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta$

$\rightarrow \tau \Rightarrow W = \tau(\theta_f - \theta_i)$
(ثابت باشد)

$\Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$ $\quad \therefore W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$

سرعت جسم پیش و پس از انجام کار است.

α شتاب زاویه‌ای

Shuter