باسمه تعالی

آشنایی با کتابخانه الکترونیکی دانشگاه پیام نور

PnuEB

دانلود حل المسائل دانلود کتب درسی

دانلود خلاصه دروس

دانلود نمونه سوالات با جواب تستی و تشریحی

خبرنامه اس ام اس

www.PnuEB.com

خلاصه درس

ریاضی عمومی ۲

فهرست مطالب

خلاصه فصل اول

۱.۱) صورت‌های مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$

قضیه‌ی کوشی:

اگر توابع f و g در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته و در فاصله‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و اگر به ازای همه‌ی مقادیر x در بازه‌ی (a,b)، $g'(x) \neq 0$ آنگاه حداقل یک عدد همانند c در بازه‌ی (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

دستور هوپیتال

اگر توابع f(x) و g(x) مشتق‌پذیر باشند و $g'(x) \neq 0$ باشد، در صورتی که جواب حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآید در اینصورت می‌توان از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد.

قاعده‌ی هوپیتال به این صورت است که از صورت و مخرج بصورت جداگانه مشتق گرفته و سپس حد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را بررسی می‌کنیم.

۲.۱) صورت‌های مبهم دیگر

علاوه بر $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$، صورت‌های مبهم دیگری وجود دارند که عبارتند از: $\infty \times 0$ ، $\infty - \infty$ ، 0^0 ، ∞^0 و 1^∞.

در اینگونه مسائل، با روش‌های مناسب سعی می‌کنیم تا به یکی از حالت‌های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و از روش هوپیتال یا روش‌های دیگر استفاده کنیم.

۳.۱) انتگرال‌های ناسره (با حدود نامتناهی)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,\infty)$ پیوسته و نامنفی باشد. مساحت ناحیه‌ی بین منحنی y=f(x) و محور xها در بازه‌ی $[a,\infty)$ برابر است با:

$$a = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,\infty)$ پیوسته باشد. در اینصورت انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

اگر حد فوق وجود داشته باشد، انتگرال ناسره را همگرا و در غیر اینصورت آن را واگرا می‌گوییم.

✓ اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty, b]$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

۴.۱) انتگرال‌های ناسره (با انتگرال بی‌کران)

قضیه:

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$. در اینصورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

اگر حد فوق وجود داشته باشد، انتگرال ناسره‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ را همگرا و در غیراینصورت آن را واگرا گویند.

قضیه:

اگر f در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ باشد در اینصورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

قضیه:

اگر تابع f به ازای عدادی چون c در بازه‌ی باز (a,b) دارای ناپیوستگی نامتناهی بوده ولی در بقیه‌ی نقاط $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت، تعریف می‌کنیم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

این انتگرال ناسره تنها وقتی همگراست که هر دو انتگرال طرف راست همگرا باشند.

۵.۱) فرمول تیلور

قضیه:

اگر f یک تابع باشد به طوری که مشتق‌های اول تا nام آن در x=a وجود داشته باشند، در اینصورت چند جمله‌ای:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

را nامین چند جمله‌ای تیلور f حول a می‌نامیم.

نکته: اگر a=0 را در فرمول قرار دهیم قضیه‌ی تیلور به قضیه‌ی مک لورن تبدیل می‌شود.

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

قضیه‌ی تیلور:

اگر f یک تابع و n عددی طبیعی باشد بطوریکه: $f^{(n+1)}$ در بازه‌ی I وجود داشته باشد. اگر a و b دو عدد متفاوت در I باشند، آنگاه عددی چون Z بین a و b وجود دارد به طوری که:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

به ازای n=0، فرمول بالا به صورت $f(b)=f(a)=f'(z)(b-a)$ تبدیل می‌شود.

خلاصه فصل دوم

۱.۲ دنباله نامتناهی:

✓ فرض کنیم a_n یک دنباله و f تابعی باشد، به طوری که بازای هر $n \geq m$، $f(n) = a_n$ اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ آنگاه (a_n) همگراست و $\lim_{x\to\infty} a_n = L$. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ آنگاه (a_n) واگراست و $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$

✓ اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ و g تابعی باشد که در $x = L$ پیوسته است، آنگاه $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(L)$

- دنبالهٔ $(r^n) = r, r^۲, r^۳, ...$ را یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت r می‌گوییم.

دنبالهٔ هندسی (r^n) به ازای $|r| > ۱$ و $r = -۱$ واگراست

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} ۱ & r = ۱ \\ ۰ & |r| < ۱ \end{cases}$$

- اگر $\lim_{n\to\infty} |a_n| = ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$

✓ دنبالهٔ (a_n) را کراندار می‌گوئیم اگر عددی چون M وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر n، $|a_n| \leq M$

قضیه:

✓ اگر (a_n) همگرا باشد، آنگاه (a_n) کراندار است.

✓ اگر (a_n) کراندار نباشد، آنگاه (a_n) واگراست.

تعریف:

دنبالهٔ (a_n) را یکنوا گوییم هرگاه یکی از دو حالت زیر باشد:

الف) به ازای هر n، $a_{n+۱} \geq a_n$ (دنبالهٔ یکنوای غیر کاهشی)

ب) به ازای هر n، $a_{n+۱} \leq a_n$ (دنبالهٔ یکنوای غیر افزایشی)

* هر دنبالهٔ کراندار و یکنوا همگراست.

۲.۲ سری نامتناهی:

هر عبارت به صورت $a_۱ + a_۲ + ... + a_n + ...$ را یک سری نامتناهی گوئیم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = a_۰ + a_۱ + a_۲ + ...$$

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ یا وجود نداشته باشد، آنگاه سری $\sum a_n$ واگراست.

سری $\sum \frac{1}{n}$ را سری همساز می‌گویند و واگراست.

هر سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + \dots + ar^{n-1} + \dots$ را که در آن a و r اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$، یک سری هندسی می‌نامیم. a را جملهٔ اول و r را قدر نسبت این سری هندسی می‌گوئیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} |r|<1 & \text{سری همگرا} \\ |r|\geq 1 & \text{سری وگرا} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

اگر سری $\sum a_n$ واگرا و سری $\sum b_n$ همگرا باشد در این صورت

الف) $\sum a_n + \sum b_n$ واگراست

ب) اگر c عددی ناصفر باشد، سری $\sum ca_n$ نیز واگراست.

۳.۲ سری‌های با جملات نامنفی:

ـ اگر $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی و S_n مجموع جزئی nام آن باشد، در این صورت $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنبالهٔ (S_n) کراندار باشد.

*** آزمون انتگرال**

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و f یک تابع باشد که به ازای $x \geq 1$ نامنفی، پیوسته و کاهشی است و به ازای $n \geq 1$، $f(n) = a_n$ در این صورت:

الف) $\sum a_n$ همگراست اگر انتگرال ناسرهٔ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد و

ب) $\sum a_n$ واگراست اگر $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ واگراست.

قضیهٔ مهم

سری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$.

*** آزمون مقایسه**

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات نامنفی باشند در این صورت:

الف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$، $a_n \leq b_n$ آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست و $\sum a_n \leq \sum b_n$

ب) اگر $\sum b_n$ واگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$ و $b_n \leq a_n$، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگراست.

*** آزمون مقایسه حدی**

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری باشند به طوری که به ازای هر n، $a_n \geq 0$ و $b_n > 0$ در این صورت:

الف) $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ (در واقع $L \neq 0$)، آنگاه یا هر دو سری همگرا یا هر دو واگرا هستند.

ب) اگر $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.

پ) اگر $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ و $\sum b_n$ وگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ وگراست.

۴.۲ سری‌های متناوب:

*** آزمون سری‌های متناوب**

فرض کنیم (a_n) یک دنبالهٔ مثبت و غیر افزایشی باشد، یعنی به ازای هر k، $a_k \geq a_{k+1}$ به طوری که $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$، در این صورت سری‌های متناوب زیر همگرا هستند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

قضیه:

فرض کنیم سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ در شرایط آزمون سری متناوب صدق می‌کند. در این صورت خطای حاصل از تقریب مجموع این سری همگرا با مجموع جزئی nم آن یعنی S_n کمتر از a_{n+1} است.

۵.۲ همگرایی مطلق و مشروط

اگر سری $\sum |a_n|$ همگرا باشد، می‌گوئیم که سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

اگر سری $\sum a_n$ همگرا ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد (یعنی سری همگرای مطلق نباشد) آنگاه گوییم که سری $\sum a_n$ همگرای مشروط است.

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگراست و $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$

قضیه:

فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری باشد در این صورت:

الف) آزمون مقایسه: اگر به ازای هر $n \geq 1$، $|a_n| \leq |b_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) آزمون مقایسه حدی: اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L > 0$ و $\sum |b_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

*** آزمون نسبت**

فرض کنیم جمله‌های سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غیر صفر باشند در این صورت:

الف) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ آنگاه سری داده شده، همگرای مطلق است.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ یا $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$، سری داده شده واگراست.

پ) اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$، نتیجه‌ای در مورد همگرایی یا واگرایی این سری نمی‌توان به دست آورد. یعنی این سری می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

*** آزمون ریشه**

فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جمله‌های ناصفر باشد. در این صورت:

الف) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$، سری داده شده همگرای مطلق است.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ یا $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$، سری داده شده واگراست.

پ) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$، هیچ نتیجه‌ای در مورد همگرایی یا واگرایی این سری به دست نمی‌آید. یعنی این سری می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

* فرض کنیم (a_n) یک دنباله باشد. اگر

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = L < 1$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

خلاصه فصل سوم

۱.۳) سریهای توانی:

تعریف

هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a^n x^n + \dots$ را یک سری توانی به مرکز ۰ می‌گوییم، اگر c عدد حقیقی باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$ را یک سری توانی به مرکز c می‌نامیم.

نکته: برای سادگی امر، حتی وقتی x=c، فرض می‌کنیم که $(x-c)^0 = 1$

قضیه:

الف) اگر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای عدد ناصفر $x=a_1$ همگرا باشد، آنگاه به ازای هر مقدار x که $|x| < |x_1|$ همگرا (ی مطلق) است.

ب) اگر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای عدد ناصفر $x=x_2$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر مقدار x که $|x| > |x_2|$ واگراست.

قضیه:

اگر $\sum a_n x^n$ یک سری توانی باشد، آنگاه دقیقاً یکی از حالتهای زیر رخ می‌دهد.

الف) این سری تنها به ازای $x = 0$ همگراست.

ب) این سری به ازای هر مقدار x همگرا (ی مطلق) است.

ج) عدد مثبت r وجود دارد به طوری که سری فوق همگرای مطلق است اگر $|x| < r$ و واگراست اگر $|x| > r$.

اگر به جای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ را در نظر بگیریم، آنگاه با قرار دادن x-c به جای x در حالتهای (الف) و (ج) قضیه قبل، این احکام به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

الف) این سری تنها به ازای x=c همگراست.

ب) عدد مثبت r وجود دارد به طوری که این سری همگرای مطلق است اگر $|x-c| < r$ و واگراست اگر $|x-c| > r$.

تعریف:
عدد r مذکور در قضیه قبل و در تذکر زیر آن را شعاع همگرائی سری توانی می‌گوئیم. اگر حالت (الف) رخ دهد، $r = 0$ و اگر حالت (ب) صادق باشد، شعاع همگرایی را $r = \infty$ تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ مقادیر x را که به ازای آنها سری توانی داده شده همگراست. بازه همگرائی آن سری می‌گوئیم.

نکته: سری $\sum_{n=1}^{\infty}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست. (به ازای $p = 1$ این سری را سری همساز می‌گویند.)

۲.۳) مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

قضیه مشتق‌گیری سریهای توانی

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرائی $r > 0$ باشد آنگاه:

الف) شعاع همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$، که حاصل از مشتقگیری جمله به جملهٔ سری داده شده است، برابر با r است.

ب) به ازای هر مقدار x در بازه $(-r, r)$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n)$$

اگر چه قضیه مشتقگیری سریهای توانی بیان می‌کند که شعاعهای همگرائی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ یکسانند، ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که بازه‌های همگرائی آنها نیز یکی است. به عنوان بازه همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ برابر است با $[-1, 1)$، در حالی که بازه همگرائی سری مشتق آن یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ برابر با $(-1, 1)$ است.

تذکر: اگرچه قضیه مشتقگیری بیان می‌کند که مشتق سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، با شعاع همگرائی ناصفر، وجود دارد ولی چون سری مشتق شده خود یک سری توانی با همان شعاع همگرائی است، از این سری نیز می‌توان مشتق گرفت و درنتیجه سری داده شده دوباره مشتقپذیر است. با تکرار این روند نتیجه می‌گیریم که همه مشتقهای یک سری توانی با شعاع همگرائی $r \geq 0$ در بازه $(-r, r)$ وجود دارند.

قضیه انتگرالگیری سریهای توانی

اگر شعاع همگرائی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر با $r > 0$ باشد، آنگاه؛

الف) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$، حاصل از انتگرالگیری جمله به جمله از سری داده شده، برابر با r است.

ب) به ازای هر مقدار x در بازه $(-r,r)$، داریم:

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x a_n t^n dt\right]$$

۳.۳) سری تیلور

اگر تابع f را بتوان به صورت سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمایش داد، به این نمایش، نمایش سری مک‌لورن تابع f گویند.

اگر تابع f را بتوان به صورت سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نمایش داد، به این نمایش، نمایش سری تیلور تابع f گویند.

قضیه:

اگر همه مشتقهای f در بازه بازی شامل c چون I وجود داشته باشند، آنگاه این توابع را می‌توان به ازای مقادیر x در I توسط سری تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ نمایش داد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} = 0$$

که در آن z عددی بین c و x است.

۴.۳) سری دو جمله‌ای

قضیه دو جمله‌ای

اگر k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه اگر $|x| < r$،

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n$$

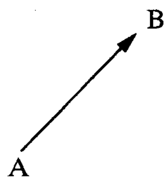
تذکر: چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ به ازای هر x همگراست، پس به ازای هر x، $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$ به همین ترتیب چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n!}$ به ازای هر x همگراست، پس به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-c)^n}{n!}\right| = 0$$

خلاصه فصل چهارم

۱.۴) بردار و هندسه تحلیلی:

یک بردار به طور هندسی پاره خطی جهت‌دار است.



این بردار را با $\overline{AB}$ نمایش می‌دهیم، نقطه‌ی A را مبدأ و نقطه‌ی B را انتهای بردار B می‌نامیم. طول پاره خط AB را اندازه‌ی بردازه بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم و با $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ نمایش می‌دهیم. جهت پاره خط AB را جهت یا سوی بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم. دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر می‌گوییم اگر اندازه و جهت آنها یکی باشد.

بردار $\overrightarrow{AC}$ مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ می‌باشد.

تعریف:

هر بردار (جبری) در صفحه مختصات یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی است. x و y را مولفه‌های بردار (x,y) می‌نامیم.

قضیه:

فرض می‌کنیم V مجموعه‌ی بردارهای واقع بر یک صفحه باشد جمع برداری روی مجموعه V دارای ویژگی‌های زیر است. به ازای هر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

الف) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

ب) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

پ) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ که در آن $\vec{0}=(0,0)$

ت) $\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V و α و β دو اسکالر باشند. آنگاه

الف) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

ب) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

پ) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

ت) $1\vec{a}=\vec{a}$

ث) $0\vec{a}=\vec{0}=\vec{a}0$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V باشند آنگاه تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

قضیه:

اندازه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

تعریف:

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را موازی می‌گوییم اگر اسکالر α وجود داشته باشد بطوری که:

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}$$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد، آنگاه $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{a}$ بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ است.

۲.۴) ضرب عددی:

تعریف:

فرض می‌کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. حاصلضرب عددی، داخلی یا نقطه‌ای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

قضیه:

فرض کنیم $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و α یک اسکالر باشد. در این صورت

الف) $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^{۲}$

ب) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

پ) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

ت) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$

ث) $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \alpha(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(\alpha\vec{b})$

ج) $\vec{۰}.\vec{a} = ۰$

قضیه:

اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{Cos}\theta$$

قضیه:

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بر هم هستند اگر و فقط اگر

$$\vec{a}.\vec{b} = ۰$$

تعریف:

زاویه‌های α، β و γ در بازه $[۰,\pi]$، به ترتیب بین بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روی محورهای مختصات، و بردار ناصفر β را زاویه‌های هادی β می‌نامیم.

تعریف:

اگر α، β و γ زاویه‌های هادی $\vec{a}$ باشند، آنگاه $\operatorname{Cos}\alpha$ ، $\operatorname{Cos}\beta$ و $\operatorname{Cos}\gamma$ را کسینوس‌های هادی $\vec{a}$ می‌نامیم.

تعریف:

فرض کنیم $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد، تصویر برداری $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با:

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^{۲}}\vec{a}$$

۳.۴) ضرب برداری:

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. حاصلضرب برداری $\vec{a}$ در $\vec{b}$ برداری است به نمایش $\vec{a}\times\vec{b}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و α یک اسکالر باشد، آنگاه

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

ب) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

پ) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

ت) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

ث) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

قضیه:

فرض کنیم $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند. در این صورت

الف) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$

ب) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند، آنگاه

الف) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$ ، $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$

در نتیجه اگر $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

ب) اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد $(0\leq\theta\leq\pi)$ آنگاه:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\text{Sin}\,\theta$$

در نتیجه دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=0$

۴.۴) خط در فضا:

هر خط L در فضا (یا صفحه) توسط دو نقطه یا یک نقطه و بردار موازی با L مشخص می‌شود.

معادله:

$$\vec{p} = \vec{p}_{\circ} + t\vec{a}$$

را معادله برداری خط می‌گویند که در آن $\vec{a}$ برداری موازی خط و $\vec{p}_{\circ}$ یک نقطه از خط می‌باشد. این معادله برداری معادل سه معادله عددی می‌باشد که به معادلات پارامتری خط معروفند.

$$\begin{cases} x = x_{\circ} + ta_{1} \\ y = y_{\circ} + ta_{2} \\ z = z_{\circ} + ta_{3} \end{cases}$$

از حذف t در معادلات پارامتری خط l معادلات متقارن یا دکارتی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{x-x_{\circ}}{a_{1}} = \frac{y-y_{\circ}}{a_{2}} = \frac{z-z_{\circ}}{a_{3}}$$

در معادلات متقارن خط اگر $a_{1} = 0$ ولی a_{2} و a_{3} مخالف صفر باشند در این صورت خط l موازی با صفحه yz است. و معادلات متقارن آن عبارتند از:

$$x = x_{\circ} \quad , \quad \frac{y-y_{\circ}}{a_{2}} = \frac{z-z_{\circ}}{a_{3}}$$

اگر $a_{1} = a_{2} = 0$ ولی $a_{3} \neq 0$ در این صورت خط l موازی محور z است و معادلات پارامتری آن عبارتند از:

$$x = x_{\circ} \ , \ y = y_{\circ} \ , \ z = z_{\circ} + ta_{3}$$

در نتیجه معادلات متقارن آن عبارتند از:

$$x = x_{\circ} \ , y = y_{\circ}$$

حالت‌های دیگر شبیه به این دو حالت هستند.

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه p_{1} از خط l عبارتست از:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{p_{\circ}p_{1}}|}{|\vec{a}|}$$

که در آن $p_{\circ}$ نقطه‌ای روی خط و $\vec{a}$ بردار موازی خط می‌باشد.

۵.۴) صفحه در فضا

معادله صفحه عمود بر بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ وگذرنده از نقطه‌ی $p_{\circ}(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ عبارتست از:

$$ax+by+cz=d$$

که در آن $d=ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}$

و یا به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=\circ$$

تعریف:

دو صفحه با بردارهای قائم $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ را موازی گوئیم اگر $\vec{N}_1$ موازی با $\vec{N}_2$ و عمود گوییم اگر $\vec{N}_1$ عمود بر $\vec{N}_2$ باشد.

فاصله نقطه‌ی $p_{\circ}(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ از صفحه $ax+by+cz+d=\circ$ عبارتست از:

$$h=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خلاصه فصل پنجم

۱.۵ بردار و ماتریس:

تعریف: هر n‌ـتایی $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ را یک بردار (سطری) و هر x_i را یک مولفهٔ آن می‌نامیم.

تعریف: فرض کنیم $u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(b_1,\dots,b_n)$ دو بردار n مولفه‌ای (مرتبهٔ n) و α یک اسکالر (عدد حقیقی) باشد مجموع و مضرب اسکالر بردارها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$$

$$\alpha u=(\alpha a_1,\alpha a_2,\dots,\alpha a_n)$$

قضیه:

فرض کنیم u و v و w سه بردار مرتبهٔ n و α و β دو اسکالر باشند. در این صورت:

الف) قانون تعویض‌پذیری جمع: $u+v=v+u$

ب) قانون شرکت‌پذیری جمع: $u+(v+w)=(u+v)+w$

پ) عضو خنثی جمع: بردار $\theta=(0,\dots,0)$ به نام بردار ۰ مرتبهٔ n وجود دارد که به ازای هر بردار مرتبهٔ n چون u

$$u+\theta=u$$

ت) متناظر با بردار u یک بردار به نمایش u- و به نام قرینه u وجود دارد به طوری که

$$u+(-u)=\theta$$

ث) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

ج) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

چ) $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

ح) $1u=u$

تعریف: طول یا اندازه بردار $u=(a_1,\dots,a_n)$ برابر است با

$$|u|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

۲.۵) ماتریس

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی به صورت

$$\left.\begin{matrix} {}_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ {}_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ {}_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots \\ {}_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right]$$

را یک ماتریس m در n (m سطری و n ستونی) می‌نامیم. هر a_{ij} یک درایه یا عنصر این ماتریس نامیده می‌شود.

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس هم اندازه و α یک عدد حقیقی باشد. در این صورت مجموع و مضرب اسکالر ماتریسها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

$\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$

قضیه:

فرض کنیم A، B و C سه ماتریس $m\times n$ و α و β دو اسکالر باشند در این صورت:

الف) $A+B=B+A$

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

د) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times p}$ و $B=(b_{ij})_{p\times n}$ دو ماتریس باشند. حاصلضرب A در B ماتریس $m\times n$ و $AB=c=(c_{ij})_{m\times n}$ است به طوری که به ازای هر $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$
$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj}$$

قضیه:

فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت $AI_n=A=I_mA$

قضیه:

فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times p}$، $B=(b_{ij})_{p\times q}$ و $C=(c_{ij})_{q\times n}$. در این صورت $A(BC)=(AB)C$

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m\times n}$. در این صورت ترانهاده A یک ماتریس $n\times m$ به نمایش A^T است که عنصر $(i\ ,\ j)$ آن برابر با عنصر $(j\ ,\ i)$ام ماتریس A است به عبارت دیگر $A^T=(b_{ij})_{n\times m}$، که در آن به ازای هر i و j $b_{ij}=a_{ji}$

قضیه:

فرض کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ و α یک اسکالر باشد. در این صورت:

الف) $(A^T)^T=A$ ترانهادهٔ یک ماتریس مساوی خودش است.

ب) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

ج) $(A+B)^T=A^T+B^T$

قضیه:

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند آنگاه $(AB)^T=B^TA^T$

تعریف: ماتریس مربعی A را متقارن گوئیم اگر $A=A^T$

۳.۵) دترمینان

تعریف: اگر A یک ماتریس ۲×۲ به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه دترمینان A را عدد حقیقی ad-bc تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

تعریف: برای هر a_{ij} در ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$، همسازه a_{ij} برابر است با عدد

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

تعریف: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{n\times n}$ در این صورت به ازای هر $i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,n$ دترمینان A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det A=|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$$

یا

$$\det A=|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}$$

قضیه:

۱) اگر ماتریس A شامل یک سطر (یا ستون) صفر باشد، آنگاه $|A| = 0$

۲) اگر تمام عناصر یک سطر (یا ستون) ماتریس A در عددی ضرب شود، مقدار دترمینان این ماتریس در آن عدد ضرب می‌شود.

۳) اگر دو سطر (یا ستون) یک ماتریس را با هم عوض کنیم، علامت مقدار دترمینان تغییر می‌کند.

۴) اگر دو سطر (یا ستون) ماتریسی یکسان باشند، مقدار دترمینان آن ماتریس صفر است.

۵) اگر مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) را با سطر (یا ستون) دیگری جمع کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۶) اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، آنگاه $|AB| = |A|\,|B|$

۷) اگر A یک ماتریس قطری باشد، دترمینان A برابر با حاصلضرب عناصر قطری آن است.

۸) $|A| = |A^T|$

۹) $|I| = 1$

۴.۵) وارون ماتریس

تعریف: ماتریس مربعی A را وارونپذیر (یا نامنفرد) گوئیم اگر ماتریس مانند B وجود داشته باشد به طوری که $AB = I = BA$

قضیه: اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ وارونپذیر باشند آنگاه:

الف) ماتریس AB وارونپذیر است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

ب) $(A^{-1})^{-1}=A$

ج) ماتریس A^T وارونپذیر است و $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

وارون ماتریس‌ها را به دو روش تحویل سطری و روش الحاقی می‌توان محاسبه کرد.

محاسبه وارون ماتریس به روش تحویل سطری:

ماتریس مرکب را تشکیل می‌دهیم:

$$A_M = \left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

اگر $a_{۱۱}=۰$ بود، سطر اول A_M را با سطر iام که $a_{i۱}\neq ۰$ عوض می‌کنیم. پس می‌توانیم فرض کنیم که $a_{۱۱}\neq ۰$. سطر اول A_M را در $\frac{۱}{a_{۱۱}}$ ضرب می‌کنیم. حال با استفاده از سطر اول، عناصر ستون اول A_M بجز عنصر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. یعنی مضاربی از سطر اول را به سطرهای دیگر اضافه یا کم می‌کنیم. به همین ترتیب ستون دوم ماتریس A_M را توسط سطر دیگری به جزء سطر اول، پاک می‌کنیم. این روند را تا جائی ادامه می‌دهیم که A_M به صورت $[I \mid B]$ در آید.

در این صورت $B=A^{-۱}$. اگر در مرحله‌ای از این روند یک سطر صفر در نیمه سمت چپ ماتریس مرکب به دست آید، ماتریس A وارون‌پذیر نیست.

محاسبه وارون ماتریس به روش الحاقی:

تعریف: ماتریس الحاقی ماتریس مربعی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را با adjA نشان می‌دهیم و آن را به صورت $\mathrm{adj}A=(A_{ij})^T$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر adjA ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است.

قضیه:

اگر A یک ماتریس n×n باشد آنگاه

$$A(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}\,A)A=(\det A)I_n$$

درنتیجه اگر $\det A\neq ۰$ آنگاه $A^{-۱}$ وجود دارد و

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}(\mathrm{adj}\,A)$$

۵.۵) دستگاه معادلات خطی

تعریف: هر معادله به صورت $a_۱x_۱+a_۲x_۲+\dots+a_nx_n=b$ با مجهولهای $x_۱,x_۲,\dots,x_n$ را یک معادلهٔ n مجهولی می‌نامیم. هر nتائی $(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ از اعداد حقیقی که در این معادله صدق کند، یک جواب آن نامیده می‌شود.

تعریف: مجموعه‌ای از معادلات خطی چون

$$\begin{aligned}
a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+\dots+a_{۱n}x_n&=b_۱\\
a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲+\dots+a_{۲n}x_n&=b_۲\\
&\vdots\\
a_{m۱}x_۱+a_{m۲}x_۲+\dots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$

را یک دستگاه m معادله خطی n مجهولی می‌نامیم. هر nتائی $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ از اعداد حقیقی که در هر یک از این معادلات صدق کند، یک جواب این دستگاه می‌باشد.

روشهای حل دستگاه معادلات خطی:

۱ـ روش حذفی گاوس ۲ـ دستور کرامر ۳ـ نمایش ماتریسی و استفاده از ماتریس وارون

روش حذفی گاوس:

ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$، ماتریس ضرایب دستگاه می‌باشد. با به کار بردن اعمال سطری مقدماتی روی A_M، ستونهای ماتریس A را تا جائی که ممکن باشد پاک می‌کنیم. وقتی همه سطرهای A به‌کار رفتند یا سطری به صورت $(0,0,\dots,0 \mid C)$ به دست آمد که در آن $C\neq 0$ این روند را متوقف می‌کنیم. اگر جوابهائی برای این دستگاه وجود داشته باشد، همگی به دست می‌آیند. اگر سطری به صورت $(0,0,\dots,0 \mid C)$ به دست آید که $C\neq 0$، آنگاه این دستگاه هیچ جوابی ندارد.

$$A_M=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

دستور کرامر:

فرض کنیم $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ماتریس ضرایب این دستگاه باشد. به ازای هر $i=1,2,\dots,n$، فرض کنید Bi ماتریس حاصل از جایگزین کردن ستون iام ماتریس A توسط ستون

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $|A|\neq 0$، آنگاه دستگاه فوق دارای جواب منحصر به فرد زیر است

$$x_1=\frac{|B_1|}{|A|}\quad,\quad x_2=\frac{|B_2|}{|A|},\dots,x_n=\frac{|B_n|}{|A|}$$

دستور کرامر برای حل دستگاه معادله خطی n معادله n مجهول به کار می‌رود.

نمایش ماتریسی دستگاه و استفاده از ماتریس وارون:

دستگاه معادلات خطی

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{gathered}$$

را می‌توان به صورت معادله ماتریسی $AX=B$ نمایش داد که در آن

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad A=(aij)_{m\times n}$$

اگر A یک ماتریس $n\times n$ وارونپذیر باشد آنگاه

$$X=A^{-1}B$$

۶.۵ پایه و بعد

تعریف: می‌گوئیم که مجموعه $\{u_1,u_2,\ldots,u_4\}$ از اعضای فضای برداری R^n دارای استقلال خطی است اگر هیچ مجموعه‌ای از اعداد $a_1,a_2,\ldots,a_k$ بجز $a_1=a_2=\ldots=a_k=0$ وجود نداشته باشد به طوری که

$$a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_ku_k=(0,\ldots,0)$$

به عبارت دیگر، مجموعه $\{u_1,\ldots,u_k\}$ دارای استقلال خطی است اگر و تنها اگر جواب معادله $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_ku_k=(0,\ldots,0)$ برابر با $x_1=x_2=0=x_k=0$ باشد در غیر این صورت مجموعه فوق دارای وابستگی خطی می‌باشد.

تعریف: هر مجموعهٔ n عضوی در R^n که دارای استقلال خطی باشد، یک پایه و n را بعد فضای بردای R^n می‌گوئیم.

قضیه:

اگر $A=\{u_1,\ldots,u_n\}$ پایه‌ای برای R^n باشد، آنگاه متناظر با هر بردار u در R^n اسکالرهای منحصر به فردی چون $a_1,a_2,\ldots,a_n$ وجود دارند که

$$u=a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n$$

۷.۵) تبدیل خطی و بردار ویژه

تعریف: فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند تابع $T:V\to W$ یک تبدیل خطی است اگر

۱) به ازای هر دو بردار u و v در V، $T(u+v)=T(u)+T(v)$

۲) به ازای هر بردار u و v در V و هر اسکالر α، $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

قضیه:

برای هر تبدیل خطی $T:R^n \to R^m$ یک ماتریس $m\times n$ چون A وجود دارد به طوری که به ازای هر بردار X در R^n، $T(X) = AX$. ستونهای این ماتریس به ترتیب عبارتند از

$$T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}\right), \ldots, T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}\right)$$

A را ماتریس نمایشگر T (نسبت به پایه‌های متعارف) می‌نامیم.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید T تبدیل خطی از R^n به روی R^n باشد. اگر برای اسکالری چون λ بردار ناصفر X وجود داشته باشد به طوری

$$T(X) = \lambda X$$

آنگاه λ را یک مقدار ویژه T و X را یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

خلاصه فصل ششم

۱.۶) حد، مشتق و انتگرال:

تعریف: هر تابع را که دامنهٔ آن زیر مجموعه‌ای از R و برد آن زیر مجموعه‌ای از فضای برداری R^n باشد یک تابع برداری می‌نامیم. به عنوان مثال:

$$\vec{F}(t)=(1-t,2t,3)=(1-t)\vec{i}+2t\vec{j}+3\vec{k}$$

یک تابع برداری می‌باشد. متناظر با هر تابع برداری $\vec{F}$ سه تابع حقیقی $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ به نام مولفه‌های $\vec{F}$ وجود دارند.

$$\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$$

در صورتی که دامنه تابع برداری مشخص نباشد، دامنه آن مجموعهٔ همه اعداد حقیقی t است که به ازای آنها فرمول داده شده برای تابع برداری با معنی باشد.

اگر به ازای هر t، $p(x,y,z)$ را نقطهٔ انتهایی بردار $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ در فضا در نظر بگیریم، آنگاه وقتی t در دامنهٔ F تغییر می‌کند، این نقطه بر روی یک منحنی با معادلات پارامتری زیر حرکت می‌کند که به آن نگاره تابع برداری $\vec{F}(t)$ می‌گوییم.

$$x=f_1(t)\ ,\ y=f_2(t)\ ,\ z=f_3(t)$$

تعریف: فرض کنیم $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ یک تابع برداری باشد. در این صورت $\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)=(\lim\limits_{t\to a}f_1(t),\lim\limits_{t\to a}f_2(t),\lim\limits_{t\to a}f_3(t))$ مشروط بر این که حدهای f_1 و f_2 و f_3 وقتی t به a میل می‌کند، وجود داشته باشند.

قضیه: فرض کنیم $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو تابع برداری و f یک تابع حقیقی باشد. اگر $\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)$ و $\lim\limits_{t\to a}\vec{G}(t)$ و $\lim\limits_{t\to a}f(t)$ وجود داشته باشند.

الف) $\lim\limits_{t\to a}(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))=\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)+\lim\limits_{t\to a}\vec{G}(t)$

ب) $\lim\limits_{t\to a}(\vec{F}(t)-\vec{G}(t))=\lim\limits_{t\to a}\vec{F}(t)-\lim\limits_{t\to a}\vec{G}(t)$

ج) $\lim\limits_{t\to a} f(t)\,\vec{F}(t) = \lim\limits_{t\to a} f(t) \lim\limits_{t\to a} \vec{F}(t)$

د) $\lim\limits_{t\to a} \left[\vec{F}(t).\vec{G}(t)\right] = \lim\limits_{t\to a} \vec{F}(t).\lim\limits_{t\to a} \vec{G}(t)$

ه) $\lim\limits_{t\to a} \left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right] = \lim\limits_{t\to a} \vec{F}(t)\times\lim\limits_{t\to a} \vec{G}(t)$

تعریف: ۱) تابع برداری $\vec{F}$ را در a پیوسته گوییم اگر

الف) $\vec{F}(a)$ معین باشد.

ب) $\lim\limits_{t\to a} \vec{F}(t)$ وجود داشته باشد.

ج) $\lim\limits_{t\to a} \vec{F}(t) = \vec{F}(a)$

۲) تابع برداری $\vec{F}$ را در بازهٔ I پیوسته می‌گوییم اگر در هر $a\in I$ پیوسته باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{F}$ یک تابع برداری و a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت مشتق $\vec{F}$ در a برابر است با:

$$\left|\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\right|_{t=a} = \vec{F}'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(a+h)-\vec{F}(a)}{h}$$

قضیه: اگر $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ آنگاه:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))$$

قضیه: اگر توابع برداری $\vec{F}$ ، $\vec{G}$ و تابع حقیقی f در بازه I مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

الف) $\dfrac{d\,[\vec{F}(t)+\vec{G}(t)]}{dt} = \dfrac{d\vec{F}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{G}(t)}{dt}$

ب) $\dfrac{d\,[\vec{F}(t)-\vec{G}(t)]}{dt} = \dfrac{d\vec{F}(t)}{dt} - \dfrac{d\vec{G}(t)}{dt}$

پ) $\dfrac{d\,[f(t)\ \vec{F}(t)]}{dt} = \dfrac{d\vec{F}(t)}{dt}\ \vec{F}(t) + f(t)\dfrac{d\vec{F}(t)}{dt}$

ت) $\dfrac{d\,[\vec{F}(t).\vec{G}(t)]}{dt} = \dfrac{d\vec{F}(t)}{dt} . \vec{G}(t) + \vec{F}(t)\times\dfrac{d\vec{G}(t)}{dt}$

ج) $\frac{d\vec{F}(u)}{dt} = \frac{du}{dt}\,\frac{d\vec{F}(u)}{du}$ که در آن $u=f(t)$

تعریف: اگر $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ آنگاه:

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

قضیه: اگر توابع برداری $\vec{F}$ و $\vec{G}$ در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و α یک اسکالر $\vec{C}$ یک بردار باشد، آنگاه:

الف) $\int_a^b \left[F(t)+G(t)\right]dt = \int_a^b \vec{F}(t)dt + \int_a^b \vec{G}(t)\,dt$

ب) $\int_a^b \alpha\vec{F}(t)dt = \alpha\int_a^b \vec{F}(t)dt$

ج) $\int_a^b \vec{C}.\vec{F}(t)\,dt = \vec{C}\int_a^b \vec{F}(t)dt$

تعریف: انتگرال نامعین تابع برداری $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int \vec{F}(t)\,dt = \left[\int f_1(t)dt\right]\vec{i} + \left[\int f_2(t)\,dt\right]\vec{j} + \left[\int f_3(t)dt\right]\vec{k} + \vec{C}$$

که در آن $\vec{C}$ هر عضو دلخواه R^3 است.

۲.۶) سرعت و شتاب:

بردار موضع: $\vec{R}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

سرعت: $\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

شتاب: $\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \vec{R}''(t) = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$

۳.۶) مماس و قائم بر منحنی:

تعریف: بردار مماس بر منحنی هموار C را با $\vec{T}(t)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{d\vec{R}/dt}{\left|d\vec{R}/dt\right|}$$

تعریف: بردار قائم بر منحنی هموار C را با $\vec{N}(t)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} = \frac{d\vec{T}/dt}{\left|d\vec{T}/dt\right|}$$

اگر بردار شتاب یعنی $\vec{A}(t)$ را به دو مولفه در جهت‌های بردارهای مماس و قائم $\vec{T}$ و $\vec{N}$ تجزیه کنیم، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A}(t) = A_T(t)\,\vec{T}(t) + A_N(t)\,\vec{N}(t)$$

که در آن:

$$A_T(t) = \frac{d}{dt}\left|\vec{V}(t)\right| \,,\; A_N(t) = \left|\vec{V}(t)\right|\left|\vec{T}'(t)\right|$$

واضح است که:

$$\left|\vec{A}(t)\right| = \sqrt{(A_N(t))^۲ + (A_T(t))^۲}$$

۴.۶) خمیدگی (انحنا):

تعریف: اگر $\vec{T}(t)$ بردار وحد مماس بر منحنی C در نقطه p و s نمایش طول قوس باشد، آنگاه خمیدگی c در p توسط فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

فرمول‌هایی برای محاسبه خمیدگی

۱ـ فرض کنیم که جسمی بر منحنی C که توسط $\vec{R}(t)$ داده شده است حرکت می‌کند در این صورت:

$$k = \frac{\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^۳}$$

که در آن $\vec{V} = \vec{R}'(t)$ و $\vec{A} = \vec{V}'$ می‌باشند.

۲ـ فرض کنیم که جسمی بر منحنی C در صفحه xy که توسط معادلات پارامتری $y = g(t)$ و $x = f(t)$ داده شده است حرکت می‌کند. آنگاه:

$$k = \frac{\left| f'(g)\, g''(t) - g'(t)\, f''(t) \right|}{\left[(f'(t))^{۲} + (g'(t))^{۲} \right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

۳ـ فرض کنید منحنی C توسط معادله دکارتی $y=g(x)$ داده شده باشد. آنگاه:

$$k = \frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲} \right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

خلاصه فصل هفتم

۱.۷ توابع چند متغیره:

تعریف: تابع f که دامنهٔ آن زیر مجموعه‌ای از R^n و برد آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد را یک تابع (حقیقی) n متغیره می‌گوییم.

تعریف: اگر f و g دو تابع با دو متغیر باشند آنگاه

$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$

$(f-g)(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$

$(f.g)(x,y)=f(x,y).g(x,y)$

$(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$

نکته: اگر f یک تابع سه متغیره (دو متغیره) باشد، آنگاه به ازای هر عدد C، مجموعه همه نقاط $(x,y,z)((x,y))$ را بطوری که $f(x,y,z)=c$ $(f(x,y)=c)$ یک سطح تراز f می‌نامیم.

۲.۷) حد و پیوستگی:

تعریف: فرض کنیم تابع f در درون دایره‌ای به مرکز (a,b) بجز احتمالاً در (a,b)، معین است در این صورت عدد L را حد f در (a,b) می‌گوییم اگر متناظر با هر $\epsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ آنگاه $|f(x,y)-L|<\epsilon$ می‌توان نشان داد که عدد L در صورت وجود منحصر به فرد است و درنتیجه آن را به صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

نشان دهیم.

قضیه:

فرض کنیم $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ در این صورت

$$\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(a,y)=L \quad , \quad \lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,b)=L$$

قضیه:

اگر حد تابع f وقتی (x,y) بر روی منحنی متمایز به (a,b) نزدیک می‌شود متفاوت باشد آنگاه

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد درنتیجه

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] \neq \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

قضیه:

اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ وجود داشته باشد آنگاه

الف) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f-g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)-\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x-y)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$\lim(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\neq 0$$

قضیه:

فرض کنیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$ و تابع یک متغیرهٔ g در L پیوسته باشد در این صورت:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y))=g(L)$$

تعریف: می‌گوییم تابع دو متغیره f در (a,b) پیوسته است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

الف) f(a,b) وجود داشته باشد.

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

ج) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

نکته: برای محاسبه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ اگر حداقل دو مسیر دلخواه گذرا از نقطه (a,b) موجود باشد که حد تابع f(x,y) در نقطه (a,b) بر روی آنها یکسان نباشد $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود نیست.

نکته: اگر f یک تابع سه متغیره و g تابعی یک متغیره باشد به طوری که f در (a,b,c) پیوسته و g در f(a,b,c) پیوسته باشد آنگاه gof در (a,b,c) پیوسته است.

۳.۷) مشتق جزئی

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجود داشته باشد می‌گوییم که مشتق جزئی f نسبت به x وجود دارد.

مقدار این حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و آن را با نمادهای $f_x(x,y)$ یا $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب مشتق جزئی f نسبت به y در نقطهٔ (x,y) برابر است با:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

قضیه:

فرض کنیم f یک تابع با دو متغیر x و y باشد به طوری که f_{xy} و f_{yx} در (a,b) پیوسته باشند در این صورت:

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

۴.۷ نمو تابع دو متغیره

قضیه:

فرض کنیم $z=f(x,y)$ ، f_x ، f_y در همسایگی نقطهٔ (x,y) پیوسته باشند فرض کنیم

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

نمو z به ازای نموهای Δx و Δy باشد در این صورت

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

که در آن $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1=0$ و $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2=0$

تعریف: تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است اگر همسایگی D از (a,b) و توابع دو متغیرهٔ ε_1 و ε_2 وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر (x,y) در D

$$f(x,y)-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon_1(x-a)+\varepsilon_2(y-b)$$

قضیه:

اگر تابع دو متغیره f در (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در (a,b) پیوسته است.

نکته: $df=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f_z(x,y,z)dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

۵.۷ قاعده زنجیره‌ای

صورتهای قاعدهٔ زنجیره‌ای برای تابع با دو متغیر

الف) فرض کنیم $z=f(x,y)$، $x=g_1(t)$ و $y=g_2(t)$ در این صورت $z=f(g_1(t),g_2(t))$ و

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ب) فرض کنیم $z=f(x,y)$ و $x=g_1(u,v)$ و $x=g_2(u,v)$ در این صورت $z=f(g_1(u,v)$ و $g_2(u,v))$

و

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

نکته: $f'(x)=\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

۶.۷ مشتق سوئی و گرادیان

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y و $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد مشتق سوئی f در نقطهٔ (x,y) و در جهت u را با $D_uf(x,y)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$D_uf(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha_1,y+ha_2)-f(x,y)}{h}$$

قضیه:

اگر f در (x,y) مشتق‌پذیر و $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد آنگاه

$$D_uf(x,y)=f_x(x,y)a_1+f_y(x,y)a_2$$

تعریف: بردار $f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$ را گرادیان تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و

$$\text{grad}f(x,y)=\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$$

قضیه:

مقدار ماکسیمم $D_uf(x,y)$ در نقطهٔ (x,y) برابر است با $|\nabla f(x,y)|$ و در جهت بردار $\nabla f(x,y)$ به دست می‌آید.

۷.۷ صفحهٔ مماس

قضیه:
فرض کنیم منحنی هموار C نمودار معادلهٔ $F(x,y)=0$ باشد اگر F در نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ واقع بر منحنی C مشتق‌پذیر باشد و $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$ آنگاه بردار $\nabla f(x_0,y_0)$ در نقطهٔ P بر منحنی عمود است.

تعریف: فرض کنیم تابع F در نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر سطح S به معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ مشتق‌پذیر باشد صفحه مماس بر S در نقطهٔ P صفحه‌ای است که از P می‌گذرد و $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ بردار نرمال آن است.

نکته: اگر تابع F در نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر سطح S به معادله $F(x,y,z)=0$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه مماس بر S در نقطهٔ P به صورت زیر است:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x,y,z)(z-z_0)=0$$

نکته: دو سطح $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در نقطه P دارای صفحه مماس مشترک‌اند هرگاه بردارهای عمود بر دو سطح در نقطه P با هم موازی باشند یعنی $(K\in R)\nabla F(P)=K\nabla G(P)$

۸.۷ ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y و R زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد در این صورت:

الف) $f(x_0,y_0)$ مقدار ماکسیمم (مطلق) f در R است اگر به ازای هر (x,y) در R
$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

ب) $f(x_0,y_0)$ مقدار مینیمم (مطلق) F در R است اگر به ازای هر (x,y) در R
$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$

ج) اگر R برابر با دامنهٔ f باشد آنگاه $f(x_0,y_0)$ مذکور در (الف) و (ب) را به ترتیب مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم f می‌گوییم.

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد در این صورت

الف) f در (x_0,y_0) دارای ماکسیمم نسبی است اگر دایرهٔ C به مرکز (x_0,y_0) در دامنهٔ f وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون C، $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

ب) f در $(x_\circ,y_\circ)$ دارای مینیمم نسبی است اگر دایرهٔ C به مرکز $(x_\circ,y_\circ)$ در دامنهٔ f وجود داشته باشد به طور یکه به ازای هر (x,y) در درون C، $f(x,y) \geq f(x_\circ,y_\circ)$

قضیه:

فرض کنیم f در $(x_\circ,y_\circ)$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد اگر مشتقهای جزئی f در $(x_\circ,y_\circ)$ وجود داشته باشد آنگاه $f_x(x_\circ,y_\circ)=\circ \quad , \quad f_y(x_\circ,y_\circ)=\circ$

آزمون مشتق دوم:

فرض کنیم f تابعی با دو متغیر x و y باشد و $f_x(x_\circ,y_\circ)=\circ=f_y(x_\circ,y_\circ)$

فرض کنیم مشتقهای جزئی f درون دایره‌ای به مرکز $(x_\circ,y_\circ)$ پیوسته باشند و

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\left[f_{xy}(x,y)\right]^2$$

در این صورت:

الف) اگر $D(x_\circ,y_\circ)>\circ$ و $f_{xx}(x_\circ,y_\circ)<\circ$ آنگاه f در $(x_\circ,y_\circ)$ ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر $D(x_\circ,y_\circ)>\circ$ و $f_{xx}(x_\circ,y_\circ)>\circ$ آنگاه f در $(x_\circ,y_\circ)$ مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر $D(x_\circ,y_\circ)<\circ$ آنگاه f در $(x_\circ,y_\circ)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

د) اگر $D(x_\circ,y_\circ)=\circ$، نتیجه‌ای از این آزمون به دست نمی‌آید.

نکته: اگر $x^m y^n z^p ...=k$ که k یک مقدار ثابت است آنگاه $x+y+z+...$ زمانی مینیمم است که $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=...$

۹.۷ مضرب لاگرانژ

روش لاگرانژ برای توابع دو متغیره

برای یافتن اکسترممهای نسبی تابع دو متغیره $f(x,y)$ با شرط $g(x,y)=\circ$ تابع لاگرانژ را به صورت $F(x,y,\lambda)=f(x,y),\lambda g(x,y)$ تعریف کرده و نقاط اکسترمم f با حل دستگاه سه معادله سه مجهول زیر بدست می‌آید.

$F_x=\circ \quad , \quad F_Y=\circ \quad , \quad F_\lambda=\circ$

نکته: برای تعیین ماکسیمم یا مینیمم (مطلق) تابع چند متغیره f تحت قید g ابتدا نقاط اکسترمم را بدست آورده سپس مقدار آنها را تحت تابع f بدست می‌آوریم. کمترین و بیشترین مقدار f به ترتیب مینیمم و ماکسیمم (مطلق) f تحت قید g می‌باشند.

خلاصه فصل هشتم

انتگرالهای چندگانه

۱.۸) انتگرال دوگانه

قضیه:

اگر f روی R پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه حجم زیر ناحیهٔ محدود به f و ناحیهٔ R برابر است با

$$V=\iint_R f(x,y)dA$$

قضیه:

اگر ناحیه بسته و محدود R اجتماع دو ناحیهٔ بسته و ومحدود R_1 و R_2 باشد، به طوری که تنها در نقاط مرزی مشترک باشند، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R_1} f(x,y)dA+\iint_{R_2} f(x,y)dA$$

قضیه:

اگر f(x,y) و g(x,y) روی ناحیهٔ بسته و محدود R پیوسته باشند آنگاه

$$\iint_R f(x,y)+g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA+\iint_R g(x,y)dA$$

قضیه:

اگر انتگرال دوگانه f(x,y) روی R وجود داشته باشد و c عددی حقیقی باشد، آنگاه

$$\iint_R cf(x,y)dA=c\iint_R f(x,y)dA$$

محاسبه انتگرال دوگانه:

الف) اگر f روی ناحیه R_1 پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_{R_1} f(x,y)dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

ب) اگر f روی ناحیه R_2 پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_{R_2} f(x,y)dA=\int_c^d\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy$$

که در آن R_1 و R_2 به صورت زیر می‌باشند:

$$R_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y) \ , \ c \le y \le d\}$$

۲.۸) انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

در مختصات قطبی متغیرهای انتگرال‌گیری r و θ می‌باشند. لذا انتگرال دوگانه در مختصات قطبی به صورت زیر می‌باشد

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \end{cases}$$

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr \qquad \begin{cases} h_1(r) \le \theta \le h_2(r) \\ a \le r \le b \end{cases}$$

برای تبدیل یک انتگرال مکرر در مختصات دکارتی به یک انتگرال مکرر در مختصات قطبی ابتدا به جای x و y، به ترتیب $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ قرار می‌دهیم. سپس به جای $dydx$ (یا $dxdy$) عبارت $rdrd\theta$ (یا $rd\theta dr$) قرار می‌دهیم.

۳.۸) مساحت رویه

فرمول مساحت رویه: فرض کنیم S مساحت قسمتی از رویهٔ $Z=f(x,y)$ است که روی ناحیهٔ محدود و بستهٔ R واقع است. اگر f_x و f_y در R پیوسته باشند آنگاه:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\, dA$$

مساحت رویه دوار:

فرض کنیم $y=f(x)$ در $[a,b]$ نامنفی باشد و نمودار آن حول محور x دوران کند. داریم:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx$$

۴.۸) انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه در مورد توابع سه متغیرهٔ حقیقی تعریف می‌شود. فرض کنیم R ناحیه بسته و محدودی در صفحه xy و $D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in R, F_1(x,y) \le z \le F_2(x,y)\}$ ناحیه‌ای در فضا باشد به طوری که مشتقهای اول F_1 و F_2 روی R پیوسته باشند. آنگاه:

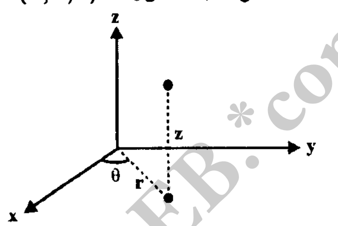
$$\iiint_D f(x,y,z)dv = \iint_R \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] = dA$$

اگر D جسم محدود به نمودارهای توابع پیوستهٔ دو متغیرهٔ F_1 و F_2 روی ناحیه R در صفحه xy باشد آنگاه حجم D برابر است با:

$$V = \iiint_D 1 dV$$

۵.۸) انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای متغیرها به صورت (r,θ,z) تعریف می‌شوند.



برای تبدیل مختصات دکارتی (x,y,z) به مختصات استوانه‌ای، از فرمولهای $x^2+y^2=r^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم.

برعکس، برای تبدیل مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) به مختصات دکارتی، فرمولهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را به کار می‌بریم.

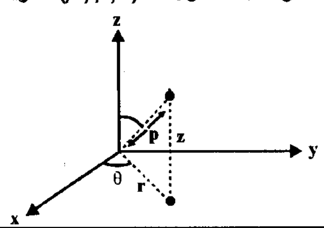
انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

$$\iiint_D f(r,\theta,z)dV = \iint_R \left[\int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dz\right] dA$$

$$D = \{(r,\theta,z) \mid (r,\theta)\in R \ , F_1(r,\theta)\le z\le F_2(r,\theta)\}$$

۶.۸) انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی متغیرها به صورت (ρ,ϕ,θ) تعریف می‌شوند.



رابطه بین مختصات دکارتی (x,y,z)، مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) و مختصات کروی توسط فرمولهای زیر داده می‌شود.

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z = \rho\cos\phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

قضیه:

فرض کنیم $h_1(\theta)$، $h_2(\theta)$، $F_1(\phi,\theta)$ و $F_2(\phi,\theta)$ توابعی پیوسته و D مجموعهٔ تمام نقاط (ρ,ϕ,θ) باشد، به طوری که $\alpha\le\theta\le\beta$ و $0\le h_1(\theta)\le\phi\le h_2(\theta)\le\pi$ ، $F_1(\phi,\theta)\le\rho\le F_2(\phi,\theta)$ و $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$ اگر f در D پیوسته باشد آنگاه

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{F_1(\phi,\theta)}^{F_2(\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi).\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

۷.۸) کاربردهای فیزیکی

جرم یک ورق مسطحه: اگر یک صفحه نازک به نام ورق مسطحه توسط ناحیه R محدود شده باشد چگالی هر نقطه (x,y) در R را با $\rho(x,y)$ نشان دهیم، آنگاه جرم این ورق مسطحه توسط رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA$$

جرم یک جسم فضایی: اگر یک جسم فضائی به ناحیه D محدود شده باشد و چگالی هر نقطه (x,y,z) در D را با $\rho(x,y,z)$ نشان دهیم آنگاه جرم این جسم فضائی توسط رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dV$$

گشتاور اول و مرکز جرم ورق مسطحه:

گشتاور اول نسبت به محور x به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)dA$$

گشتاور اول نسبت به محور y به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$M_y = \iint_R x\rho(x,y)dA$$

و مرکز جرم ورق مسطحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad , \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

گشتاور دوم (یا ماند) ورق مسطحه:

گشتاور دوم حول محور x برابر است با:

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)dA$$

گشتاور دوم حول محور y برابر است با:

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)dA$$

گشتاور نسبت به مبدأ مختصات یا گشتاور قطبی برابر است با:

$$I_o = \iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dA = I_x + I_y$$

گشتاور اول و مرکز جرم یک جسم فضائی:

اگر چگالی هر نقطهٔ یک جسم محدود به ناحیه فضائی D، $\rho(x,y,z)$ باشد در این صورت گشتاورهای اول این جسم حول صفحه‌های xy، xz و yz به ترتیب برابرند با:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)dV$$

مختصات مرکز جرم این جسم عبارتست از:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad , \quad \bar{z} = \frac{M_{yx}}{m}$$

گشتاور ماند یک جسم فضائی:

گشتاورهای دوم یک جسم محدود به ناحیه فضایی D حول محورهای x، y و z به ترتیب عبارتند از:

$$I_x = \iiint_D (y^۲+x^۲)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^۲+z^۲)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^۲+y^۲)\rho(x,y,z)dV$$

خلاصه فصل نهم

مباحثی در آنالیز برداری

۹-۱) میدان برداری

اگر $D\subset R^3$، آنگاه هر تابع $\vec{F}:D\to R^3$ را یک میدان برداری با دامنه‌ی D گویند.

گرادیان F:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

اگر $\vec{F}=\nabla f$، آنگاه $\vec{F}$ را یک میدان برداری پایستار و f را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می‌نامیم.

واگرایی یک میدان برداری:

فرض کنیم $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری باشد به طوری که $\frac{\partial M}{\partial x}$، $\frac{\partial N}{\partial y}$، $\frac{\partial P}{\partial z}$ وجود داشته باشند. در اینصورت واگرایی $\vec{F}$ به نمایش $\operatorname{div}\vec{F}$ یا $\nabla.\vec{F}$ تابعی با تعریف زیر است:

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\nabla.\vec{F}(x,y,z)$$
$$=\frac{\partial M}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial N}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)$$

چرخه‌ی یک میدان برداری:

فرض کنیم $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری است به طوری که مشتقهای جزئی اول M، N و P وجود دارند. در این صورت، چرخه‌ی $\vec{F}$ به نمایش $\operatorname{curl}\vec{F}$ یا $\nabla\times\vec{F}$، یک میدان برداری با تعریف زیر است:

$$\operatorname{curl}\vec{F}(x,y,z)=\nabla\times\vec{F}(x,y,z)$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

برای راحتی $\operatorname{curl}\vec{F}$ را به صورت زیر هم تعریف می‌کنیم:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}$$

Lap f:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

تابعی را که در معادلهٔ:

$$\nabla^2 f = \operatorname{Lap} f = 0$$

به نام معادله لاپلاس، صدق کند همساز (هارمونیک) می‌گوئیم.

قضیه:

اگر $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری پایستار باشد، (یعنی اگر تابع f با مشتقهای جزئی پیوسته وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F} = \operatorname{grad} f$) آنگاه:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

اگر دامنهٔ $\vec{F}$ تمام فضا باشد، عکس این حکم نیز صادق است.

۹-۲) انتگرال خط

$$W = \int_C \vec{F}.\vec{dr}$$

این انتگرال را انتگرال خط $\vec{F}$ روی C می‌گویند.

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_a^b [M(f(t),g(t),h(t))\frac{dx}{dt} + N(f(t),g(t),h(t))\frac{dy}{dt}$$
$$+ P(f(t),g(t),h(t))\frac{dz}{dt}]dt$$

۹-۳) قضیهٔ اساسی انتگرال خط

قضیه:

فرض کنیم C یک منحنی جهت‌دار هموار یا قطعه‌ای هموار با نقطهٔ ابتدایی (x_0, y_0, z_0) و نقطهٔ انتهایی (x_1, y_1, z_1) باشد. فرض کنیم میدان برداری $\vec{F}$ روی C پیوسته باشد و $\vec{F} = \operatorname{grad} f = \nabla f$، که در آن f روی C مشتق‌پذیر است در اینصورت:

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_C \nabla f.\vec{dr} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)$$

بطور کلی اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنهٔ D باشد، بطوری که برای هر دو منحنی جهت‌دار C_1 و C_2 در D، با ابتدا و انتهای یکسان $\int_{C_1} \vec{F}.\vec{dr} = \int_{C_2} \vec{F}.\vec{dr}$

آنگاه می‌گوئیم که $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ مستقل از مسیر است.

بنابراین قضیهٔ اساسی انتگرال خط بیان می‌کند که:

اگر $\vec{F}$ پایستار باشد، آنگاه $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ مستقل از مسیر است.

۹-۴) قضیهٔ گرین

فرض کنیم ناحیهٔ R در صفحهٔ xy توسط منحنی جهت‌دار قطعه‌ای هموار، ساده و بستهٔ C محدود شده و M و N دو تابع دو متغیره با مشتقات جزئی پیوسته باشند. در این صورت:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

۹-۵) آشنایی با انتگرال سطح

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_R g(x,y,f(x,y))$$

$$= \sqrt{[fx(x,y)]^2 + [fy(x,y)]^2 + 1}\;\; dA$$

قضیهٔ استوکس:

فرض کنیم S رویه‌ای با بردار واحد قائم $\vec{n}$ باشد که توسط منحنی قطعه‌ای هموار C محدود شده است. اگر میدان بردای $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ و مشتقات جزئی مؤلفه‌های آن روی S پیوسته باشند، آنگاه:

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = \iint_S (\mathrm{curL}\,\vec{F}).\vec{n}.dS$$