مثال: طول منحنی $y=\int_0^x \sinh t\,dt$ از $x=0$ تا $x=1$ را بیابید؟ $y'=\sinh x$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx \xlongequal{\cosh^2 x-\sinh^2 x=1} \int_0^1\sqrt{\cosh^2 x}\,dx=\int_0^1\cosh x\,dx=(\sinh x)\Big|_0^1$$

$$=(\sinh(1)-\cancel{\sinh(0)})=\sinh(1)$$

نکته: طول منحنی تابع پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}, a\le t\le b$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

مثال: طول منحنی $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=\cos t\end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ را به دست آورید؟ $x'_t=1-\cos t$ ، $y'_t=-\sin t$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{2-2\cos t}_{2(1-\cos t)}}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt \xlongequal{1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4(\overset{-1}{\cos\pi}-\overset{1}{\cos 0})=-4(-2)=8$$

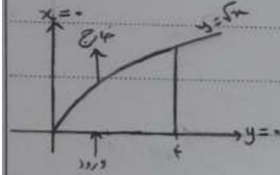
نکته: $$\int_0^a\frac{\overbrace{(f(x)+f(a-x))}-f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx=\int_0^a\left(1-\frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\right)dx \xlongequal[\substack{x=0\to y=a\\ x=a\to y=0}]{\boxed{\substack{y=a-x\\ dy=-dx}}} a-\int_0^a\frac{f(y)\,dy}{f(y)+f(a-y)}$$

$$\Rightarrow\int\frac{f(y)\,dy}{f(y)+f(a-y)}=\frac{a}{2}$$

مثال: ناحیه ایجاد شده توسط $y=\sqrt{x}$ و $y=0$ از $x=0$ تا $x=4$ را در نظر بگیرید. مطلوبست

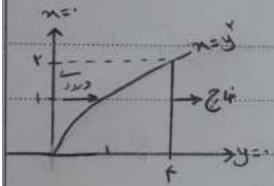
محاسبه حجم:

الف) دوران حول محور x ها: بالایی - پایینی



$$V=\pi\int_0^4\left((\sqrt{x})^2-(0)^2\right)dx=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$$

ب) دوران حول محور y ها: راستی - چپی



$$V=\pi\int_0^2(16-y^2)\,dy=\left(16y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{88}{3}$$

۴) محاسبه طول منحنی: طول منحنی $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

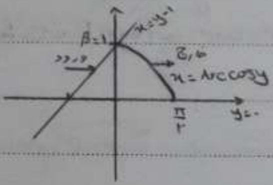
$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dy$$

مثال: طول منحنی $y=Ln\cos x$ از $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید؟

$$y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tg x$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(-tg x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+tg^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx=$$

$$=\left(Ln(\sec x+tg x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=Ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)-\cancel{Ln(1+0)}^{\,0}=Ln(\sqrt{2}+1)$$



حل عرضی: $S=\int_0^1(\text{Arccos}y-y+1)dy$

$=\left(y\,\text{Arccos}y-\sqrt{1-y^2}-\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^1$

$=\text{Arccos}(1)+\frac{3}{2}$

$$\int \text{Arccos}y\,dy=y\,\text{Arccos}y+\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=y\,\text{Arccos}y-\sqrt{1-y^2}$$

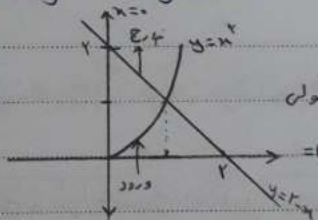
علامت	$\frac{d}{dy}$	$\int dy$
+	$\text{Arccos}y$	1
−	$\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$	y

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\xrightarrow{\boxed{\begin{matrix}u=1-y^2\\ du=-2y\,dy\end{matrix}}}\int\frac{\frac{du}{-2}}{\sqrt u}=\frac{-1}{2}\int\frac{du}{\sqrt u}=-\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\sqrt u)=-\sqrt{1-y^2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه ایجادشده توسط $y=x^2$ و $y=2-x$ و $x=0$ در قسمت مثبت

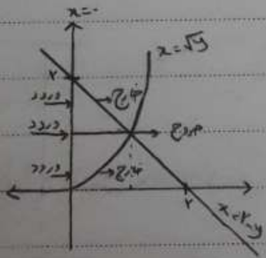
x	0	1	2
$y=x^2$	0	1	4

x	0	2
$y=2-x$	2	0



محور x ها: حل طولی: $S=\int_0^1(2-x-x^2)dx$

$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{6}$



حل عرضی: $S=S_1+S_2=\int_1^2(2-y-0)dy+\int_0^1(\sqrt y-0)dy$

$=\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{7}{6}$

۲) حجم حاصل از دوران:

دوران محور x ها: $V=\pi\int_a^b\left(F^2(x)-g^2(x)\right)dx$ ⇐ مانند حل طولی، حل می‌شود

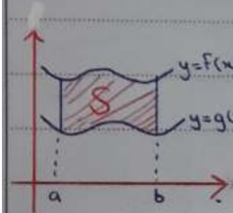
دوران محور y ها: $V=\pi\int_\alpha^\beta\left(F^2(y)-g^2(y)\right)dy$ ⇐ مانند حل عرضی، حل می‌شود

۴) $\lim \left(\ln\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} + \ln\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \ln\sqrt[n]{1+\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\underbrace{\ln(1+\tfrac{1}{n})}_{F(x)=\ln(1+x)} + \ln(1+\tfrac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\tfrac{n}{n})\Big) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx =$

$= \big((x+1)\ln(x+1) - (x+1)\big)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$

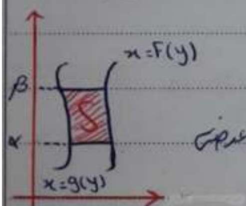
۲) محاسبه مساحت منحنی: مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $y=F(x)$ و $y=g(x)$ از $x=a$ تا $x=b$



با فرض $g(x) \le F(x)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

حل طولی: $S = \int_a^b \big(F(x) - g(x)\big)\,dx$ بالایی - پایینی

مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $x=F(y)$، $x=g(y)$ از $y=\alpha$ تا $y=\beta$ با فرض $g(y) \le F(y)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

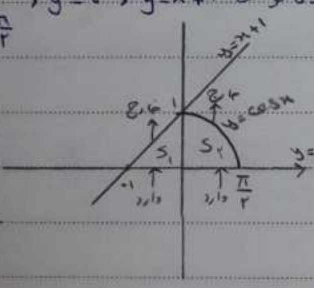


حل عرضی: $S = \int_\alpha^\beta \big(F(y) - g(y)\big)\,dy$ راستی - چپی

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه ایجاد شده توسط $y=x+1$ ، $y=0$ ، $\begin{cases} y=\cos x \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ؟

x	0	-1
$y=x+1$	1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$y=\cos x$	1	1



حل طولی: $S = S_1 + S_2$

$= \int_{-1}^{0} (x+1-0)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 0)\,dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}\ \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x}{3x}\ \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x}{3}=\frac{2}{3}$$

کاربرد انتگرال معین :

۱) محاسبه حد مجموع :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(F\left(\tfrac{1}{n}\right)+F\left(\tfrac{2}{n}\right)+\dots+F\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 F(x)\,dx$$

مثال :

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}}_{F(x)=\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+\tfrac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\tfrac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx\ \ \frac{\left[\begin{array}{l}1+x=t^2\to x=t^2-1\\ dx=2t\,dt\end{array}\right]}{\begin{array}{l}x=0\to t=1\\ x=1\to t=\sqrt{2}\end{array}}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} t\times 2t\,dt=2\int_1^{\sqrt{2}}t^2\,dt=\left(2\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\dots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{F(x)=\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}\ \ \frac{\left[\begin{array}{l}u=1+x\\ du=dx\end{array}\right]}{\begin{array}{l}x=0\to u=1\\ x=1\to u=2\end{array}}\int_1^2\frac{du}{u}=\ln u\Big|_1^2=\ln 2-\cancel{\ln 1}^{\,0}=\ln 2$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+2e^{-\frac{2}{n}}+\dots+ne^{-\frac{n}{n}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}}+2e^{-\frac{2}{n}}+\dots+ne^{-\frac{n}{n}}}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n}+\frac{2e^{-\frac{2}{n}}}{n}+\dots+\frac{ne^{-\frac{n}{n}}}{n}\right)=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^1=\frac{-2}{e}+1$$

$$\frac{1}{n},\ e^{-\frac{1}{n}}\to F(x)=xe^{-x}$$

علامت		
$+$	x	e^{-x}
$-$	1	$-e^{-x}$
$+$	0	e^{-x}

۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = (x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$

علامت	$\frac{d}{dx}$	$\int dx$
+	x^2	$\cos x$
−	$2x$	$\sin x$
+	2	$-\cos x$
−	0	$-\sin x$

۶) $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}} \xrightarrow[\begin{bmatrix} x=0 \to u=1 \\ x=1 \to u=2 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} u=x^3+1 \\ du=3x^2dx \end{bmatrix}} \int_1^2 \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\, 2\sqrt{u}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

۷) $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} x=t^2 \to dx=2t\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=1 \end{bmatrix}} \int_0^1 \sqrt{1-t} \times 2t\, dt \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1-t=u^2 \to dt=-2u\,du \\ t=0 \to u=1 \\ t=1 \to u=0 \end{bmatrix}}$

$\int_1^0 u \times 2(1-u^2)(-2u)\, du = -4\int_1^0 (u^2-u^4)\, du = -4\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_1^0 = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$

۸) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \stackrel{\text{زوج}}{=} 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x=tg\,t \to dx=(1+tg^2 t)\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+tg^2 t)\,dt}{(1+tg^2 t)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

تغییر مشتق انتگرال معین: $u=u(x)$, $v=v(x)$

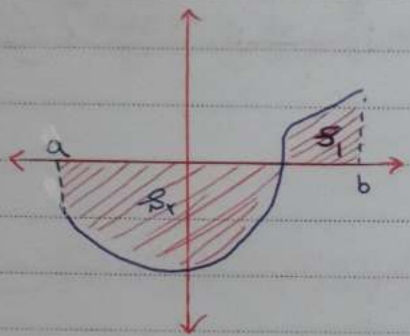
$$y = \int_u^v z(t)\,dt \Rightarrow y' = v' z(v) - u' z(u)$$

مثال: y' توابع زیر را بیابید؟

1) $y = \int_{\sin(2x)}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\, dt \to y' = 3x^2\sqrt{1+(x^3)^2} - 2\cos 2x\sqrt{1+(\sin 2x)^2}$

2) $y = \int_{x^2}^{5} \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}} \to y' = 0 - 2x \times \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^3}} = -2x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$

انتگرال معین:



$$\int_a^b F(x)dx = S_1 - S_2$$

قضیه (نیوتن - لایب نیتز - معروف به قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال): فرض کنید $F(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $\int F(x)dx = F(x)+C$ در این صورت $\int_a^b F(x)dx = F(b)-F(a)$

خواص انتگرال معین:

1) $\int_a^a F(x)dx = 0$ 2) $\int_a^b F(x)dx = -\int_b^a F(x)dx$

3) $\int_a^b F(x)dx = \int_a^c F(x)dx + \int_c^b F(x)dx \ , \ a<c<b$

4) $F(x)$ فرد $\Rightarrow \int_{-a}^{a} F(x)dx = 0$ 5) $F(x)$ زوج $\Rightarrow \int_{-a}^{a} F(x)dx = 2\int_0^a F(x)dx$

مثال:

1) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ 2) $\int_0^{\pi} \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = 0$

3) $\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = (x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 + (\frac{x^2}{2}-x)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

	0	1	2	
-	-	+	-	

4) $\int_0^2 |x^2-5x+4|dx = \int_0^1 (x^2-5x+4)dx - \int_1^2 (x^2-5x+4)dx = (\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x)\Big|_0^1$

$- (\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x)\Big|_1^2 = -5$

0		1		2		4	
+		+		-		-	+

$x^2-5x+4=0 \longrightarrow x=1,4$

۲) $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$\sqrt{-x^2+2x+3} = xt + \sqrt{3} \xrightarrow{(\,)^2} -x^2+2x+3 = x^2t^2 + 2\sqrt{3}\,xt + 3$

$\Rightarrow x^2(t^2+1) + 2x(\sqrt{3}t - 1) = 0 \to x = \dfrac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1} \to dx = \dfrac{-4\sqrt{3}t - 4t + 4\sqrt{3}t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$

$$\int \frac{\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1}+2\right)\left(\dfrac{-4t(\sqrt{3}+1)+4\sqrt{3}t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\right)}{\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}t}{t^2+1}+1\right)\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}t}{(t^2+1)}\times t+\sqrt{3}\right)}$$

۱۳) انتگرال گیری از توابع به فرم $F(x , \sqrt{ax^2+bx+c})$ (روش اویلر):

۱) $a>0$: از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$ استفاده می کنیم. علامت $\sqrt{a}$ دلخواه است

۲) $c>0$: از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ استفاده می کنیم. علامت $\sqrt{c}$ دلخواه است.

۳) $ax^2+bx+c=0$ دارای ۲ ریشه α و β باشد، در این صورت از تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ استفاده می کنیم.

$$1)\ \int\sqrt{2x-x^2}\,dx \xrightarrow[\;2x-x^2=0\ \to\ \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\;]{\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{2x-x^2}=xt\xrightarrow{(2)}2x-x^2=x^2t^2\to x^2(t^2+1)-2x=0\\ \to x=\frac{2}{t^2+1}\to dx=\frac{-2t\times 2}{(t^2+1)^2}dt\end{array}}} \int\frac{2t}{t^2+1}\times\frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$=\int\frac{-8t^2\,dt}{(t^2+1)^3}=\int\frac{-8\,dt}{(t^2+1)^2}+\int\frac{8\,dt}{(t^2+1)^3}\xrightarrow{\begin{bmatrix}t=tg\,s\\dt=(1+tg^2s)ds\end{bmatrix}}\int\frac{-8\cancel{(1+tg^2s)}ds}{(1+tg^2s)^{\cancel{2}}}+\int\frac{8\cancel{(1+tg^2s)}ds}{(1+tg^2s)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$=-8\int\cos^2s\,ds+8\int\cos^4s\,ds=-8\int\frac{1+\cos2s}{2}ds+8\int\left(\frac{1+\cos2s}{2}\right)^2ds=-4\int(1+\cos2s)ds$$

$$+2\int(1+\cos^22s+2\cos2s)ds=-4\left(s+\frac{1}{2}\sin2s\right)+2\left(s+2\left(\frac{1}{2}\sin2s\right)+\int\left(\frac{1+\cos4s}{2}\right)ds\right)$$

$$=-4s-\cancel{2\sin2s}+2s+\cancel{2\sin2s}+s+\frac{1}{4}\sin4s=-s+\frac{1}{4}\sin4s$$

$$=-Arctg\,t+\frac{1}{4}\sin4(Arctg\,t)$$

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^3}=\frac{At+B}{(t^2+1)^3}+\frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}+\frac{Et+F}{t^2+1}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=-1\\C=0\\D=1\\E=0\\F=0\end{cases}\Rightarrow\frac{t^2}{(t^2+1)^3}=\frac{-1}{(t^2+1)^3}+\frac{1}{(t^2+1)^2}$$

۳) $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x}dx \xrightarrow[t=\text{Arcsec}(\frac{x}{a})]{x=a\sec t \Rightarrow dx=a\sec t\,tgt\,dt} = \int \frac{(a^2\sec^2 t - a^2)^{\frac{3}{2}} \times \cancel{a\sec t}\, tgt\, dt}{\cancel{a\sec t}}$

$= \int \frac{(a^2tg^2t)^{\frac32}\, tgt\,dt}{1} = a^3\int tg^4 t\,dt = a^3\int(\underline{tg^4t + tg^2t} - \underline{tg^2t - 1} + 1)dt$

$= a^3\left(\int tg^2t(1+tg^2t)dt - \int(1+tg^2t)dt + \int dt\right) \xrightarrow{\begin{bmatrix}u=tgt\\ du=(1+tg^2t)dt\end{bmatrix}} = a^3\left(\int u^2du - \int du + t\right)$

$= a^3\left(\frac{u^3}{3}-u+t\right) = a^3\left(\frac{tg^3t}{3} - tgt + t\right) = a^3\left(\frac{tg^3(\text{Arcsec}(\frac{x}{a}))}{3} - tg(\text{Arcsec}(\frac{x}{a})) + \text{Arcsec}(\frac{x}{a})\right)+c$

تابع کسری

۱۲) انتگرال گیری از توابع به شکل $F(\cos x , \sin x)$ یا نصف کمان: از تغییر متغیر $t = tg(\frac{x}{2})$ ،

در نتیجه $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ استفاده می کنیم.

مثال:

۱) $\int\frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{3+t^2}{\cancel{1+t^2}}} = 2\int\frac{dt}{3+t^2} \overset{\text{فرمول ۱۴}}{=} \frac{2}{\sqrt3}\text{Arctg}\frac{t}{\sqrt3}+c$

$=\frac{2}{\sqrt3}\text{Arctg}\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt3}\right)+c$

۲) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}dx \xrightarrow[t=\text{Arcsin}\,x]{x=1\sin t \Rightarrow dx=\cos t\,dt} = \int\frac{\sqrt{1-\sin^2t}\times\cos t\,dt}{1+\sin^2t} = \int\frac{\cos^2t\,dt}{1+\sin^2t}$

$\xrightarrow{z=tg(\frac t2)} = \int\frac{(\frac{1-z^2}{1+z^2})^2\times\frac{2dz}{1+z^2}}{1+(\frac{2z}{1+z^2})^2} = 2\int\frac{(1-z^2)^2\,dz}{\underbrace{(z^4+6z^2+1)}_{\star}(1+z^2)} = 2\int\frac{(1-z^2)^2dz}{(z^2+3-\sqrt8)(z^2+3+\sqrt8)(1+z^2)}$

★ $z^4+6z^2+1=0 \xrightarrow{z^2=w} w^2+6w+1=0 \xrightarrow{\Delta=32} w_{1,2}=\frac{-6\mp\sqrt{32}}{2}=-3\mp\sqrt8 \Rightarrow \begin{cases} z^2=-3+\sqrt8\\ z^2=-3-\sqrt8\end{cases}$

۱۱) انتگرال گیری به روش تغییر مثلثاتی: اگر انتگرال دارای جملات $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، $\sqrt{x^2+a^2}$ یا اینکه جمله x^2+a^2 در مخرج کسر باشد، از این روش برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم:

۱) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sin t$ استفاده می‌کنیم.

۲) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{x^2+a^2}$ باشد یا اینکه x^2+a^2 در مخرج کسر باشد از $x=a\,tg\,t$ استفاده می‌کنیم.

۳) اگر انتگرال دارای جمله $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد از $x=a\sec t$ استفاده می‌کنیم.

یادآوری:

$$\sec^2 t = 1+tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

مثال:

$$1)\ \int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx \xrightarrow[t=\mathrm{Arcsin}(\frac{x}{2})]{x=2\sin t\ \to\ dx=2\cos t\,dt} =\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{\cancel{2}\sin t}\times\cancel{2}\cos t\,dt$$

$$=\int\frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt = 2\int\frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t}\,dt = 2\int\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt = 2\left(-\mathrm{Ln}(\mathrm{csec}\,t+\cot t)+\cos t\right)+C$$

$$=2\left(-\mathrm{Ln}\left(\mathrm{csec}(\mathrm{Arcsin}(\tfrac{x}{2}))+\cot(\mathrm{Arcsin}(\tfrac{x}{2}))\right)+\cos(\mathrm{Arcsin}(\tfrac{x}{2}))\right)+C$$

$$2)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} \xrightarrow[t=\mathrm{Arctg}(\frac{x}{3})]{x=3\,tg\,t\ \to\ dx=3(1+tg^2 t)\,dt} =\int\frac{3(1+tg^2 t)\,dt}{9tg^2 t\sqrt{9tg^2 t+9}} =\int\frac{\cancel{3}\times\frac{1}{\cancel{\cos^2 t}}\,dt}{9\times\frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos^2 t}}\times\cancel{3}\times\frac{1}{\cos t}}$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \xrightarrow[du=\cos t\,dt]{u=\sin t} =\frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2} =\frac{-1}{9u}=\frac{-1}{9\sin t}=\frac{-1}{9\sin(\mathrm{Arctg}(\frac{x}{3}))}$$

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \to k=4$

$$2)\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{bmatrix}} = \int \frac{t^2}{t^3+1} \times 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^5\,dt}{t^3+1} \overset{*}{=} 4\left(\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt\right)$$

$$= 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}Ln(t^3+1)\right) \xrightarrow{t=\sqrt[4]{x}} 4\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{1}{3}Ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right)$$

$$*)\ \begin{array}{r|l} t^5 & t^3+1 \\ \cancel{-t^5} \pm t^2 & t^2 \\ \hline -t^2 & \end{array} \Rightarrow t^5 = t^2(t^3+1) - t^2 \xrightarrow{\div(t^3+1)} \frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}$$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t^3+1 \\ du=3t^2dt \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}Lnu = \frac{1}{3}ln(t^3+1)$$

تعمیم روش ۱۰: اگر انتگرال دارای جملات $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, \ldots\ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}$ باشد

برای حل انتگرال از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ استفاده می‌کنیم که k مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots\ldots, \frac{p}{q}$

است.

مثال:

$$\frac{1}{2} \to k=2$$

$$1)\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx = \int \left(\frac{2+3x}{x-3}\right)^{\frac{1}{2}} dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{2+3x}{x-3}=t^2 \to 2+3x = xt^2 - 3t^2 \to x = \frac{3t^2+2}{t^2-3} \\ dx = \frac{6t(t^2-3)-2t(3t^2+2)}{(t^2-3)^2}dt \to dx = \frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt \end{bmatrix}}$$

$$= \int t \times \frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t \to du=dt \\ dv=\frac{-22t}{(t^2-3)^2} \overset{\int}{\to} v=\frac{11}{t^2-3} \end{bmatrix}} = \frac{11t}{t^2-3} - \int \underbrace{\frac{11\,dt}{t^2-3}}_{x^2-a^2} = \frac{11t}{t^2-3} - 11 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} Ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}} \frac{11\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}}{\frac{2+3x}{x-3}-3} - 11 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} Ln\frac{\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}+\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{-22t\,dt}{(t^2-3)^2} = -22\int \frac{t\,dt}{(t^2-3)^2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=t^2-3 \\ du=2t\,dt \end{bmatrix}} -22\int \frac{\frac{du}{2}}{u^2} = -11\left(\frac{-1}{u}\right) = \frac{11}{t^2-3}$$

2) $\frac{x^3-1}{x^2(x^2+x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^3}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)}+\frac{I}{x-2}$

مثال: $\int\frac{(2x+5)dx}{x^2(x-1)} = \int\left(\frac{-5}{x^2}+\frac{-7}{x}+\frac{7}{x-1}\right)dx = -5\frac{x^{-1}}{-1}-7\ln x+7\ln(x-1)$

$$\frac{2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2(B+C)+x(A-B)-A}{x^2(x-1)}$$

چون مخرج ها با هم برابرند صورت ها نیز با هم برابراند

$$\begin{cases} B+C=0 \to C=7 \\ A-B=2 \to B=-7 \\ -A=5 \to A=-5 \end{cases}$$

نکته: اگر درجه صورت بزرگتر مساوی درجه مخرج بود تقسیم می کنیم:

مقسوم | مقسوم علیه / خارج قسمت

باقی مانده

$\Rightarrow$ مقسوم = مقسوم علیه × خارج قسمت + باقی مانده

$\Rightarrow$ $\frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم علیه}}$ = خارج قسمت + $\frac{\text{باقی مانده}}{\text{مقسوم علیه}}$

۱۰) انتگرال گیری با تغییر متغیر t^k: اگر انتگرال دارای جملات $x^{\frac{m}{n}}$، $x^{\frac{r}{s}}$، ...... ، $x^{\frac{p}{q}}$ باشد، برای حل انتگرال از تغییر متغیر $x=t^k$ استفاده می کنیم که k، مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}$، $\frac{r}{s}$، ...، $\frac{p}{q}$ است.

$\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \to k=12$

مثال: $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \end{bmatrix}} = \int\frac{t^{18}-t^4}{t^3}\times 12t^{11}dt = 12\int(t^{26}-t^{12})dt$

$= 12\left(\frac{t^{27}}{27}-\frac{t^{13}}{13}\right) \xrightarrow{t=\sqrt[12]{x}} 12\left(\frac{\sqrt[12]{x^{27}}}{27}-\frac{\sqrt[12]{x^{13}}}{13}\right)$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

۱۹) انتگرال گیری به روش تجزیه کسرها: برای بدست آوردن انتگرال $\frac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$ که درجه صورت الزاماً از درجه مخرج کمتر است، ابتدا مخرج را به طور کامل تجزیه می کنیم تا به صورت حاصلضرب عوامل $(x-a)^m$ و $(x^2+ax+b)^m$ ($\Delta<0$) در بیاید. سپس برای هر یک از عوامل، کسرهای زیر را نسبت می دهیم:

الف) $(x-a)^m$: $\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{C}{(x-a)}$

ب) $\underset{\Delta<0}{(x^2+ax+b)^m}$: $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^m}+\frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^{m-1}}+\cdots+\frac{Ex+F}{x^2+ax+b}$

نکته: اگر $\Delta>0$ باشد، عبارت را تجزیه می کنیم.

تابع زیر علامت انتگرال را برابر مجموع کسرها قرار می دهیم و اعداد مجهول A، B، C، ...... را به دست می آوریم.

مثال: فقط تجزیه به کسرهای عبارات زیر را بنویسید؟

الف) $\underset{\Delta>0 \to \text{تجزیه}}{\frac{x}{x^2-1}}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}$

ب) $\underset{\Delta>0 \to \text{تجزیه}}{\frac{x}{(x^2-1)(x+1)}}=\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x-1)}$

ج) $\frac{2x^2+5}{(x-1)^2x^3(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$

2000

۸) انتگرال های بازگشتی: انتگرال هایی هستند که پس از ۲ بار جزء به جزء، انتگرال اولیه بدست می آید.

الف) $\begin{Bmatrix} e \\ \sinh \\ \cosh \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}$ همگی با کمان $(ax+b)$: هر چی بین این دو تا، از کدومشون مشتق بگیریم

مثال:

$$1)\ \int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$$

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx$
+	e^{2x}	$\cos(3x)$
−	$2e^{2x}$	$\frac{1}{3}\sin(3x)$
+	$4e^{2x}$	$\frac{-1}{9}\cos(3x)$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x)$$

$$\xrightarrow{\div \frac{13}{9}} \int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x)\right)$$

ب) انتگرال های $\int \cos Ln(ax+b)\,dx$ و $\int \sin Ln(ax+b)\,dx$: ۲ بار جدول می نویسیم و هر جدول را

تا ۲ سطر ادامه می دهیم.

$$2)\ \int \cos(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + \int \sin(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx) - \int \cos(Lnx)$$

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx$
+	$\cos(Lnx)$	1
−	$\frac{-1}{x}\sin(Lnx)$	x

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx$
+	$\sin(Lnx)$	1
−	$\frac{1}{x}\cos(Lnx)$	x

$$\Rightarrow 2\int \cos(Lnx)\,dx = x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx) \xrightarrow{\div 2}$$

$$\int \cos(Lnx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(Lnx) + x\sin(Lnx)\right)$$

$$3)\int(3x^3-2x+1)\sin(2x)\,dx=\frac{-1}{2}(3x^3-2x+1)\cos(2x)+\frac{1}{4}(9x^2-2)\sin(2x)+\frac{18}{8}x\cos(2x)-\frac{18}{16}\sin 2x$$

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx=dv$
$+$	$\rightarrow 3x^3-2x+1$	$\sin 2x$
$-$	$\rightarrow 9x^2-2$	$\frac{-1}{2}\cos(2x)$
$+$	$\rightarrow 18x$	$\frac{-1}{4}\sin(2x)$
$-$	$\rightarrow 18$	$\frac{1}{8}\cos(2x)$
$+$	0	$\frac{1}{16}\sin(2x)$

نکته: همواره جدول را تا جایی ادامه می‌دهیم که انتگرال حاصلضرب سطر آخر قابل محاسبه باشد.

$$5)\int \mathrm{Arctg}x\,dx=x\,\mathrm{Arctg}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\,\mathrm{Arctg}x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)$$

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx=dv$
$+$	$\rightarrow \mathrm{Arctg}x$	1
$-$	$\dashrightarrow \frac{1}{1+x^2}$ *	$\dashrightarrow x$ *

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2}\xrightarrow{\begin{bmatrix}u=(1+x^2)\\ du=2x\,dx\end{bmatrix}}=\int\frac{\frac{du}{2}}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}u$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)$$

*) $\dashrightarrow\ =\int$(علامت)$u\,dv$

$$6)\int(4x^5-x+1)\mathrm{Ln}x\,dx=\left(\frac{2x^6}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Ln}x-\int\left(\frac{2x^5}{3}-\frac{x}{2}+1\right)dx$$

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx=dv$
$+$	$\rightarrow \mathrm{Ln}x$	$4x^5-x+1$
$-$	$\dashrightarrow \frac{1}{x}$	$\dashrightarrow \frac{4x^6}{6}-\frac{x^2}{2}+x$

$$=\left(\frac{2x^6}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Ln}x-\left(\frac{2}{3}\times\frac{x^6}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+x\right)$$

$$1)\int(2x-1)\cos(5x)\,dx \xrightarrow[\boxed{\begin{array}{l} dv=\cos(5x)dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{5}\sin(5x)\end{array}}]{\boxed{u=2x-1 \xrightarrow{()'} du=2dx}}$$

$$=\frac{1}{5}(2x-1)\sin(5x)-\int\frac{2}{5}\sin(5x)\,dx=\frac{1}{5}(2x-1)\sin(5x)-\frac{2}{5}\times\frac{-1}{5}\cos(5x)$$

$$\int\sin 5x\,dx=\frac{-1}{5}\cos(5x)$$

$$2)\int x^5 \ln x\,dx \xrightarrow{\boxed{\begin{array}{l}u=\ln x \xrightarrow{()'} du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^5dx \xrightarrow{\int} v=\frac{x^6}{6}\end{array}}} =\frac{x^6}{6}\ln x-\int\frac{x^6}{6}\times\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{1}{6}\times\frac{x^6}{6}$$

$$\int\frac{x^5}{6}\,dx=\frac{1}{6}\int x^5\,dx=\frac{1}{6}\times\frac{x^6}{6}$$

$$3)\int x^2e^{3x}\,dx \xrightarrow{\boxed{\begin{array}{l}u=x^2 \xrightarrow{()'} du=2x\,dx\\ dv=e^{3x}dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}}} =\frac{x^2}{3}e^{3x}-\int\frac{2}{3}xe^{3x}\,dx=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right)$$

$$\int xe^{3x}\,dx \xrightarrow{\boxed{\begin{array}{l}u=x \xrightarrow{()'} du=dx\\ dv=e^{3x}dx \xrightarrow{\int} v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}}} =\frac{1}{3}xe^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}e^{3x}$$

نکته: اگر x^n بود باید n بار به روش جزء به جزء انتگرال بگیریم.

حل مثال ۳ به روش نردبانی:

علامت	$\frac{d}{dx}=u$	$\int dx=dv$
$+$	x^2	e^{3x}
$-$	$2x$	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$+$	2	$\frac{1}{9}e^{3x}$
$-$	0	$\frac{1}{27}e^{3x}$

$$\Rightarrow\int x^2e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}$$

۲) $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \int \frac{\frac{1}{2}(4x-5)}{\sqrt{2x^2-5x+4}}\,dx + \int \frac{(5+\frac{5}{2})\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}}}_{I} + (5+\frac{5}{2})\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}}}_{II}$

I) $\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2x^2-5x+4 \\ du=(4x-5)dx \end{bmatrix}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{2x^2-5x+4}$

II) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2[(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Ln\left(x-\frac{5}{4}+\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}\right)$

مربع کامل: $2x^2-5x+4 = 2(x^2-\frac{5}{2}x+2) = 2\left[(x-\frac{5}{4})^2+\frac{7}{16}\right]$

جواب نهایی: $= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2x^2-5x+4} + \frac{\sqrt{2}}{2} Ln\left(x-\frac{5}{4}+\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}\right)$

۷) انتگرال گیری به روش جزء به جزء: اگر ۲ تابع در هم ضرب شوند و انتگرال آن به روش تغییر متغیر حل نشود از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم که فرمول آن به صورت زیر است:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

نکته: در این روش تقدم انتخاب u به صورت زیر می‌باشد:

۱) تابع Ln و توابع معکوس مثلثاتی مثل Arcsin ، Arctg ، ......

۲) توابع چند جمله‌ای

۳) توابع نمایی و مثلثاتی مانند Sin ، Cos ، ....

۳) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+2x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} \overset{\text{فرمول ۳}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ArcSin}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$

حل مربع کامل: $-2x^2+2x+1 = -2\left[x^2-x-\frac{1}{2}\right] = -2\left[\left(x+\frac{2}{2(-2)}\right)^2-\frac{4}{16}+\frac{1}{-2}\right] = -2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$

$= 2\left[\frac{3}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

۱۶) انتگرال های به فرم $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ یا $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{Ln}(ax^2+bx+c)\,=\,\text{تغییر متغیر}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{\text{مربع کامل}}$$

مثال: 1) $\displaystyle\int \frac{(4x+3)}{3x^2-2x-1}\,dx = \int \frac{\frac{4}{6}(6x-2)}{3x^2-2x-1}\,dx + \int \frac{3-\frac{-8}{6}}{3x^2-2x-1}\,dx = \frac{4}{6}\underbrace{\int \frac{(6x-2)}{3x^2-2x-1}\,dx}_{\mathrm{I}} + \frac{26}{6}\underbrace{\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}}_{\mathrm{II}}$

I) $\displaystyle\int \frac{(6x-2)\,dx}{3x^2-2x-1} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} u=3x^2-2x-1 \\ du=(6x-2)dx \end{array}\right]} \int \frac{du}{u} = \text{Ln}\,u = \text{Ln}(3x^2-2x-1)$

II) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \overset{\text{فرمول ۱۵}}{=\!=} \frac{1}{3}\times\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)}\,\text{Ln}\left(\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\right)$

حل مربع کامل: $3x^2-2x-1 = 3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} = \frac{4}{6}\,\text{Ln}(3x^2-2x-1) + \frac{26}{6}\times\frac{1}{4}\,\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x-\frac{1}{3}}\right)$

۲) $\int \cot^8 x\,dx = \int(\underline{\cot^8 x + \cot^6 x} - \underline{\cot^6 x - \cot^4 x} + \underline{\cot^4 x + \cot^2 x} - \underline{\cot^2 x - 1} + 1)\,dx$

$= \int \cot^6 x(1+\cot^2 x)dx - \int \cot^4 x(1+\cot^2 x)dx + \int \cot^2 x(1+\cot^2 x)dx - \int(1+\cot^2 x)dx + \int dx$

$\begin{bmatrix} u=\cot x \\ du = -(1+\cot^2 x)dx \end{bmatrix} \Longrightarrow = -\int u^6 du + \int u^4 du - \int u^2 du + \int du + \int dx = \frac{-u^7}{7} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u + x + c$

$= -\frac{\cot^7 x}{7} + \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + c$

۵) انتگرال گیری از: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ یا $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$: ax^2+bx+c را مربع کامل می‌کنیم و سپس

از فرمول های ۱۲ تا ۱۵ انتگرال گیری ها استفاده می‌کنیم.

یادآوری مربع کامل: $ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{مربع کامل}} = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

مثال: ۱) $\int \frac{dx}{2x^2+3x-1} = \int \frac{dx}{2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{17}}{4})^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{17}}{4})^2\right]} \overset{\text{فرمول ۱۵}}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\frac{\sqrt{17}}{4}} \times Ln\,\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}} + c$

مربع کامل: $2x^2+3x-1 = 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right] = 2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right] = 2\left[(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16}\right]$

۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left[(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2}} \overset{\text{فرمول ۱۳}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} Ln\left((x-\frac{1}{6}) + \sqrt{(x-\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{59}}{6})^2}\right) + c$

مربع کامل: $3x^2-x+5 = 3\left[x^2 - \frac{x}{3} + \frac{5}{3}\right] = 3\left[(x+\frac{-1}{6})^2 - \frac{1}{36} + \frac{5}{3}\right] = 3\left[(x-\frac{1}{6})^2 + \frac{59}{36}\right]$

یادآوری فرمول ها ۱۲ تا ۱۵ انتگرال گیری:

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ArcSin(\frac{x}{a}) + c$ ۱۵) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln(\frac{x-a}{x+a}) + c$

2000 ۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$ ۱۴) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} Arctg(\frac{x}{a}) + c$

۳) انتگرال گیری از توابع های زوج sin ، cos : از روابط $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

مثال :

۱) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

۲) $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos^2 2x - 2\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right) dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sin 4x - 2\times\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

۴) انتگرال گیری از توابع توانی های tg و cot : برای انتگرال گیری از $tg^n x$ جملات $tg^{n-2}x$ ، $tg^{n-4}x$ ، ... ، نهایتاً

- tgx ، اگر n فرد باشد
- و
- 1 ، اگر n زوج باشد

را به صورت : اضافه می‌کنیم ← کم می‌کنیم ← اضافه می‌کنیم ← کم می‌کنیم ← اضافه می‌کنیم

اضافه و کم می‌کنیم. سپس انتگرال های حاصل را به کمک تغییر متغیر حل می‌کنیم.

مثال :

۱) $\int tg^7 x\,dx = \int (\underline{tg^7 x + tg^5 x} - \underline{tg^5 x - tg^3 x} + \underline{tg^3 x + tgx} - tgx)\,dx$

$= \int tg^5 x(1+tg^2 x)\,dx - \int tg^3 x(1+tg^2 x)\,dx + \int tgx(1+tg^2 x)\,dx - \int tgx\,dx \xrightarrow[du=(1+tg^2 x)dx]{u=tgx}$

$= \int u^5\,du - \int u^3\,du + \int u\,du - \int tgx\,dx = \frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} - \ln\cos x + C = \frac{tg^6 x}{6} - \frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^2 x}{2} - \ln\cos x$

۵) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=x^2+5 \\ du=2x\,dx \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{2}\ln(x^2+5)+c$

۶) $\int (2x^3+7)^4 x^2\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2x^3+7 \\ du=6x^2dx \end{bmatrix}} = \int u^4 \times \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\times\frac{u^5}{5} = \frac{1}{30}(2x^3+7)^5+c$

۷) $\int \frac{\sin(3x)\,dx}{(2+5\cos(3x))^4} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=2+5\cos(3x) \\ du=-15\sin(3x)\,dx \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{du}{-15}}{u^4} = \int \frac{du}{-15u^4} = \frac{1}{-15}\int\frac{du}{u^4} = \frac{-1}{15}\int u^{-4}du$

$= \frac{+1}{15}\times\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{1}{45u^3} = \frac{1}{45(2+5\cos(3x))^3}$

۸) $\int \frac{dx}{3e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \int \frac{e^{-x}dx}{3+e^{-x}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=3+e^{-x} \\ du=-e^{-x}dx \end{bmatrix}} = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + c = -\ln(3+e^{-x})+c$

۱۲) انتگرال گیری از توابع های جزء sin و cos: توان یا sin یا cos را جدا می کنیم و جمله باقیمانده را از رابطه‌ی $\sin^2x+\cos^2x=1$ جایگذاری می کنیم. سپس با روش تغییر متغیر انتگرال را حل می کنیم.

مثال: ۱) $\int \cos^3x\,dx = \int \cos^2x\cos x\,dx = \int(1-\sin^2x)\cos x\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix}}$

$= \int(1-u^2)\,du = u-\frac{u^3}{3}+c = \sin x-\frac{\sin^3x}{3}+c$

۲) $\int \sin^5x\,dx = \int \sin^4x\sin x\,dx = \int(1-\cos^2x)^2\sin x\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \end{bmatrix}}$

$= -\int(1-u^2)^2du = -\int(1+u^4-2u^2)\,du = -(u+\frac{u^5}{5}-2\frac{u^3}{3})+c = -(\cos x+\frac{\cos^5x}{5}-2\frac{\cos^3x}{3})+c$

مثال ۱۰: $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C$ ، $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

مثال ۱۱: $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C$ ، $\int x^{-4}\,dx = \dfrac{x^{-3}}{-3} + C$

مثال ۱۲: $\int (1+tg^2(4x))\,dx = \frac{1}{4} tg(4x) + C$ ، $\int \cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

روش های انتگرال گیری:

۱) روش تغییر متغیر: چنانچه در انتگرال، جمله ای را u بگیریم و du نیز در زیر علامت انتگرال وجود داشته باشد از این روش برای حل انتگرال استفاده می کنیم.

یادآوری: $y = F(x) \Rightarrow dy = F'(x)\,dx$

مثال:

$$1)\ \int e^{\sin x}\cos x\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix}} \int e^u\,du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

$$2)\ \int \frac{(1+tg^2x)\,dx}{\sqrt[3]{tg^2x}} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=tgx \\ du=(1+tg^2x)\,dx \end{bmatrix}} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{u} + c = 3\sqrt[3]{tgx} + c$$

نکته: اگر جمله ای که می خواهیم u بگیریم، با عدد جمع یا تفریق شده باشد، بهتر است آن را نیز جزء u بگیریم.

$$3)\ \int \frac{\cos x\,dx}{(\sin x+5)^2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=\sin x+5 \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix}} \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{u} + c = \frac{-1}{\sin x+5} + c$$

$$4)\ \int \sqrt{tgx-7}\,(1+tg^2x)\,dx \xrightarrow{\begin{bmatrix} u=tgx-7 \\ du=(1+tg^2x)\,dx \end{bmatrix}} \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(tgx-7)^3} + c$$

فرمول های انتگرال گیری:

۱) $\int dx = x + C$

۲) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

۳) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = Ln x + C$

۴) $\int Cos x \, dx = Sin x + C$

۵) $\int Sin x \, dx = -Cos x + C$

۶) $\int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{1}{Cos^2 x} dx = \int sec^2 x \, dx = tg x + C$

۷) $\int (1 + cot^2 x) dx = \int \frac{1}{Sin^2 x} dx = \int csec^2 x \, dx = -cot x + C$

۸) $\int tg x \, dx = -Ln Cos x + C = Ln sec x + C$

۹) $\int cot x \, dx = Ln Sin x + C$

۱۰) $\int sec x \, dx = Ln(sec x + tg x) + C$

۱۱) $\int csec x \, dx = -Ln(csec x + cot x) + C$

۱۲) $\int F'(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$

۱۳) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Arc Sin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۱۳) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

۱۴) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} Arc tg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۱۵) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۷) $\int e^x dx = e^x + C$

۱۸) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{Ln a} + C$

۱۹) $\int Sinh x = Cosh x + C$

۲۰) $\int Cosh x \, dx = Sinh x + C$

۲۱) $\int (1 - tgh^2 x) dx = tgh x + C$

۲۲) $\int (1 - coth^2 x) dx = Coth x + C$

مثال: سری تیلور $F(x)=(x-1)\ln x$ را در نقطه $x=1$ به دست آورید؟

حل: سری تیلور $g(x)=\ln x$ در $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\ln x \longrightarrow g(1)=\ln 1=0 \\ g'(x)=\frac{1}{x} \longrightarrow g'(1)=1 \\ g''(x)=\frac{-1}{x^2} \longrightarrow g''(1)=-1 \\ g'''(x)=\frac{2}{x^3} \longrightarrow g'''(1)=2 \end{array}\right\}$$

سری تیلور: $0+1(x-1)+\frac{-1}{2!}($

سری ماکلورن: به سری تیلور تابع $F(x)$ در $x=0$ گوییم.

تذکر: چنانچه سری ماکلورن تابع ($F(x)\times x^n\times$ عدد) خواسته شود، سری ماکلورن $F(x)$ را به دست می‌آوریم و آن را در $x^n\times$ عدد ضرب می‌کنیم.

مثال: سری ماکلورن $F(x)=2x^3e^{-4x}$ را به دست آورید؟

حل: سری ماکلورن $g(x)=e^{-4x}$:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=e^{-4x} \longrightarrow g(0)=1 \\ g'(x)=-4e^{-4x} \longrightarrow g'(0)=-4 \\ g''(x)=16e^{-4x} \longrightarrow g''(0)=16 \\ g'''(x)=-64e^{-4x} \longrightarrow g'''(0)=-64 \end{array}\right\}$$

سری ماکلورن $g(x)$: $1+(-4)(x-0)+\frac{16}{2!}(x-0)^2+\frac{(-64)}{3!}(x-0)^3+\cdots$

$\xrightarrow{\times 2x^3}$ سری ماکلورن $F(x)$: $2x^3+(-8)x^4+16x^5+\frac{-64}{3}x^6+\cdots$

انتگرال نامعین: $F'(x)=f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx=F(x)+C$

مثال: 1) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$ 2) $\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$

مثال: سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نقطه $x=1$ بنویسید؟

$F(x)=\frac{1}{x} \to F(1)=1$

$F'(x)=\frac{-1}{x^2} \to F'(1)=-1$

$F''(x)=\frac{2}{x^3} \to F''(1)=2$

$F'''(x)=\frac{-6}{x^4} \to F'''(1)=-6$

$$\Rightarrow f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$1+(-1)(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{-6}{3!}(x-a)^3+\dots$$

مثال: سری تیلور تابع $f(x)=Ln(x+1)$ را در نقطه $x=2$ بیابید؟

$F(x)=Ln(x+1) \to F(2)=Ln3$

$F'(x)=\frac{1}{x+1} \to F'(2)=\frac{1}{3}$

$F''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2} \to F''(2)=\frac{-1}{9}$

$F'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3} \to F'''(2)=\frac{2}{27}$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$Ln3+\frac{1}{3}(x-2)+\frac{-\frac{1}{9}}{2!}(x-2)^2+\frac{\frac{2}{27}}{3!}(x-2)^3+\dots$$

تمرین: سری تیلور $f(x)=10^x$ را در نقطه $x=1$ بنویسید؟

$F(x)=10^x \to F(1)=10$

$F'(x)=10^x Ln10 \to F'(1)=10Ln10$

$F''(x)=10^x(Ln10)^2 \to F''(1)=10(Ln10)^2$

$F'''(x)=10^x(Ln10)^3 \to F'''(1)=10(Ln10)^3$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$10+10Ln10(x-1)+\frac{10(Ln10)^2}{2!}(x-1)^2+\frac{10(Ln10)^3}{3!}(x-1)^3+\dots$$

تمرین: سری تیلور $F(x)=e^{5x}$ را در نقطه $x=0$ بنویسید؟

$F(x)=e^{5x} \to F(0)=e^0=1$

$F'(x)=5e^{5x} \to F'(0)=5(e^0)=5$

$F''(x)=25e^{5x} \to F''(0)=25(e^0)=25$

$F'''(x)=125e^{5x} \to F'''(0)=125(e^0)=125$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$1+5(x-0)+\frac{25}{2!}(x-0)^2+\frac{125}{3!}(x-0)^3+\dots$$

تذکر: چنانچه سری تیلور تابع $(x-a)^n f(x)$ ، n عدد در نقطه $x=a$ خواسته شود ابتدا سری تیلور $F(x)$ را بدست می‌آوریم و آن را در $(x-a)^n$ ، n عدد ضرب می‌کنیم.

$$۲)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \xlongequal{(\infty^0)} e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x \ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

حل: $\lim_{x\to 0^+}\sin x \ln\frac{1}{x} \xlongequal{(0\times\infty)} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \xlongequal[Hop]{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$

$\xlongequal[Hop]{(\frac{0}{0})} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1-0} = 0$

رفع ابهام از صورت مبهم 1^∞:

$$\lim_{x\to a} F(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)(F(x)-1)}$$

$$۱)\ \lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}} \xlongequal{(1^\infty)} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x+e^{2x}-1)} = e^3$$

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x+e^{2x}-1) \xlongequal{(\infty\times 0)} \lim_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{x} \xlongequal[Hop]{(\frac{0}{0})} \lim_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{1} = 3$

$$۲)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \xlongequal{(1^\infty)} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}-1\right)} = e^0 = 1$$

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{\cancel{1}+tgx-\cancel{1}-\sin x}{1+\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin x+\sin^2 x} \xlongequal[Hop]{(\frac{0}{0})}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-\cos x}{\cos x+2\sin x\cos x} = \frac{0}{1+0} = 0$

سری تیلور: سری تیلور تابع $F(x)$ را در نقطه $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$ تا ۴ جمله در امتحان کافیست

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\underset{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

تذکر: همه حالات $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را می‌توان با هوپیتال حل کرد.

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+4^x}{3^{x+1}+4^{x+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim\frac{3^x Ln3 + 4^x Ln4}{3\times3^x Ln3 + 4\times4^x Ln4}$ ⇐ هوپیتال، هر چند بار در دور می‌چرخد

* چون $3<4$ => عدد <۱ به بی‌نهایت صفر می‌شود

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^x+4^x}{4^x}}{\frac{3\times3^x+4\times4^x}{4^x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overset{*=0}{(\frac{3}{4})^x}+1}{3(\frac{3}{4})^x+4} = \frac{1}{4}$

رفع ابهام از $\infty\times0$: با نوشتن $Fg=\frac{F}{\frac{1}{g}}$ یا $Fg=\frac{g}{\frac{1}{F}}$، آن را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x} \overset{(\infty\times0)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

۲) $\lim\limits_{x\to0^+}xLnx \overset{(0\times-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\overset{**}{Lnx}}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{-\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}-x = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\,Lnx \overset{(0\times-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\overset{**}{Lnx}}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(\frac{-\infty}{\infty})}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2x}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\sin^2x}{x\cos x}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1-0} = 0$

** در رفع ابهام $0\times\infty$، اگر در صورت سوال Lnx داشتیم، حتماً باید Lnx را نگهداشته و دیگری را با معکوس به مخرج می‌فرستیم

رفع ابهام از صورت مبهم ∞^0 و 0^0:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)} \overset{0^0\text{ یا }\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)Lnf(x)}$

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}} \overset{(\infty^0)}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times Lnx} = e^0 = 1$

Let: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times Lnx \overset{(0\times\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Hop}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

مثال :

$1)\ \mathrm{Arctg}\,x < x \ ,\ x>0 \Rightarrow F(x) = x - \mathrm{Arctg}\,x \Rightarrow F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$

$$\xrightarrow[F(x)\ \text{صعودی}]{F(0)=0} F(x) > F(0) \Rightarrow x - \mathrm{Arctg}\,x > 0 \Rightarrow \mathrm{Arctg}\,x < x$$

$2)\ \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \ ,\ x>0 \Rightarrow F(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow F'(x) = -\sin x + \frac{2x}{2} = x - \sin x > 0 \ (*)$

(*)

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x - \sin x \\ g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0 \\ g(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{g(x)\ \text{صعودی}} g(x) > g(0) \rightarrow x - \sin x > 0$$

$$\xrightarrow{F(x)\ \text{صعودی}} F(x) \geqslant F(0) \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0 \rightarrow \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

صورت های مبهم : $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، 1^{∞} ، ∞^{0} ، 0^{0}

نکته : $\ln 0^+ = -\infty \ ,\ \ln \infty = \infty$

قاعده هوپیتال :

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)} \ \underset{HOP}{\overset{(\frac{\infty}{\infty}\ \text{یا}\ \frac{0}{0})}{=\!=\!=}} \ \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

رفع ابهام از $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ ، یک یا چند بار از هوپیتال استفاده می کنیم.

مثال :

$$1)\ \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\ln(x+3)} \ \underset{HOP}{\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}} \ \lim_{x\to -2} \frac{1}{\frac{1}{x+3}} = \lim_{x\to -2} x+3 = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x}{x^2+x-1} \ \underset{HOP}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=\!=}} \ \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x \ln 3}{2x+1} \ \underset{HOP}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=\!=}} \ \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{2} = +\infty$$

Year Month Date ( ) Subject:

نتایج قضیه مقدار میانگین:

۱) فرض کنید برای هر x داشته باشیم: $F'(x)=0$ ، در این صورت $F(x)$ تابعی ثابت است.

اثبات: $x_1 < x_2$ دو نقطه دلخواه: $F'(c) = \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} = 0$: قضیه مقدار میانگین

$\Rightarrow F(x_1) = F(x_2)$

مثال: نشان دهید: ۱) $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$

قرار دهید: $F(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x$ ⇐ واضح است $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ ⇐ بنابراین $F(x)$

تابعی ثابت است و $F(0) = \frac{\pi}{2}$ بنابراین $F(x) = \frac{\pi}{2}$.

۲) $\text{Arc}\,\text{tg}\, x + \text{Arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$

قرار دهید: $F(x) = \text{Arc}\,\text{tg}\, x + \text{Arc}\cot x$ ⇐ واضح است $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$ ⇐ بنابراین $F(x)$

تابعی ثابت است و $F(0) = \frac{\pi}{2}$ بنابراین $F(x) = \frac{\pi}{2}$.

۲) فرض کنید $F(x)$ یک تابع پیوسته روی $[a,b]$ و مشتق پذیر روی (a,b) باشد. در این صورت اگر

$F'(x) > 0$ باشد، آنگاه $F(x)$ صعودی و اگر $F'(x) < 0$ باشد، آنگاه $F(x)$ نزولی است.

۲) $|\sin x - \sin y| < |x - y| \,,\; 0 < y < x \Rightarrow f(x) = \sin x \,,\; [y, x]$

$f'(x) = \cos x$

قضیه مقدار میانگین : $\cos C = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} \xrightarrow{-1 \leq \cos C \leq 1} -1 \leq \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} \leq 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leq 1 \xrightarrow{\times |x-y|} |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

۳) $(y - x)\operatorname{tg} x < \ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < (y - x)\operatorname{tg} y \,,\; \dfrac{\pi}{2} > x > y > 0 \Rightarrow f(x) = \ln \cos x \,,\; [y, x]$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

قضیه مقدار میانگین : $-\operatorname{tg} C = \dfrac{\ln \cos x - \ln \cos y}{x - y}$

$C \in (y, x) \Rightarrow y < C < x \longrightarrow -\operatorname{tg} x < -\operatorname{tg} C < -\operatorname{tg} y$

$\Rightarrow -\operatorname{tg} x < \dfrac{\ln \cos x - \ln \cos y}{x - y} < -\operatorname{tg} y \xrightarrow{\times (x-y)} -(x-y)\operatorname{tg} x < \ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < -(x-y)\operatorname{tg} y$

$\Rightarrow (y - x)\operatorname{tg} x < \ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos y}\right) < (y - x)\operatorname{tg} y$

* ۴) $1 + 2\ln x \leq x^2 \,,\; x > 0 \Rightarrow f(x) = \ln x \,,\; [1, x^2] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین : $\dfrac{1}{C} = \dfrac{\ln x^2 - \overset{0}{\cancel{\ln 1}}}{x^2 - 1}$ (*)

$C \in (1, x^2) \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{C} < 1 \xrightarrow{(*)} \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{\ln x^2}{x^2 - 1} < 1 \longrightarrow \dfrac{\ln x^2}{x^2 - 1} < 1 \longrightarrow 1 + \ln x^2 < x^2$

$\Rightarrow 1 + 2\ln x < x^2$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

۲) $e^x > 1+x \,,\; x \neq 0$

حالت اول: $f(x)=e^x \,,\, (0, \overset{x>0}{x}) \Rightarrow f'(x)=e^x$

قضیه مقدار میانگین: $e^c = \dfrac{e^x - \overset{1}{e^0}}{x-0}$

$c \in (0,x) \to 0<c<x \xrightarrow{e^x \text{ صعودی}} \overset{1}{e^0} < e^c < e^x \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x} > 1 \Rightarrow e^x > x+1$

حالت دوم: $f(x)=e^x \,,\, (\overset{x<0}{x},0) \Rightarrow f'(x)=e^x$

قضیه مقدار میانگین: $e^c = \dfrac{\overset{1}{e^0} - e^x}{0-x} = \dfrac{1-e^x}{-x} = \dfrac{-(e^x-1)}{-x} \Rightarrow e^c = \dfrac{e^x-1}{x}$

$c \in (\overset{x<0}{x},0) \to x<c<0 \xrightarrow{e^x \text{ صعودی}} e^x < e^c < e^0 = 1 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x} < 1 \xRightarrow{x<0} e^x > x+1$

تمرین: ۱) $|\mathrm{Arctg}\, b - \mathrm{Arctg}\, a| < |b-a| \,,\; 0<a<b$ $\quad f(x)=\mathrm{Arctg}\, x \,,\, [a,b]$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{\mathrm{Arctg}\, b - \mathrm{Arctg}\, a}{b-a}$

$0 < \dfrac{1}{1+c^2} < 1 \to \left|\dfrac{1}{1+c^2}\right| < 1 \to \left|\dfrac{\mathrm{Arctg}\, b - \mathrm{Arctg}\, a}{b-a}\right| < 1 \xrightarrow{\times |b-a|} |\mathrm{Arctg}\, b - \mathrm{Arctg}\, a| < |b-a|$

2000

۴) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \quad , x>0$

روش اول: $f(x)=\ln(x+1) \ , [0,x] \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{1+c}=\frac{\ln(x+1)-\cancel{\ln(0+1)}}{x-0}=\frac{\ln(x+1)}{x} \ \circledast$

$c\in(0,x) \Rightarrow 0<c<x \to \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+0}=1 \overset{\circledast}{\Rightarrow} \frac{1}{1+x}<\frac{\ln(x+1)}{x}<1 \xrightarrow{\times x} \frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x$

روش دوم: $f(x)=\ln x \ , [1,x+1] \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{\ln(x+1)-\cancel{\ln 1}}{x+\cancel{1}-\cancel{1}}=\frac{\ln(x+1)}{x} \ \circledast$

$c\in(1,1+x) \Rightarrow 1<c<x+1 \to \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<1 \xrightarrow{\circledast} \frac{1}{x+1}<\frac{\ln(x+1)}{x}<1 \xrightarrow{\times x}$

$\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$

۵) $|\sin x|\le|x| \Rightarrow f(x)=\sin x \ , (0,x) \Rightarrow f'(x)=\cos x$

قضیه مقدار میانگین: $\cos c=\frac{\sin x-\cancel{\sin 0}}{x-0}=\frac{\sin x}{x}$

$-1\le\cos c\le 1 \to -1\le\frac{\sin x}{x}\le 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1 \xrightarrow{\times|x|} |\sin x|\le|x|$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

مثال: هریک از نامساوی‌های زیر را اثبات کنید. (با استفاده از قضیه مقدار میانگین)

1) $\frac{b-a}{1+b^2} < Arctg\,b - Arctg\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$, $0<a<b$ $\quad F(x) = Arctg\,x , [a,b]$

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

قضیه مقدار میانگین: $F'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \frac{Arctg\,b - Arctg\,a}{b-a}$ ⊛

$c \in (a,b) \Rightarrow a<c<b \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \xrightarrow{⊛} \frac{1}{1+b^2} < \frac{Arctg\,b - Arctg\,a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

$\xrightarrow{\times(b-a)} \frac{b-a}{1+b^2} < Arctg\,b - Arctg\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$

2) $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$, $0<y<x$, $p>1$ $\quad F(x) = x^p , [y,x]$

$F'(x) = px^{p-1}$

قضیه مقدار میانگین: $F'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow pc^{p-1} = \frac{x^p - y^p}{x-y}$

$c \in (y,x) \Rightarrow y<c<x \Rightarrow py^{p-1} < pc^{p-1} < px^{p-1} \Rightarrow py^{p-1} < \frac{x^p-y^p}{x-y} < px^{p-1}$

$\xrightarrow{\times(x-y)} py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}$

3) $\frac{a-b}{a} < Ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, $0<b<a$ $\quad F(x) = Ln\,x , [b,a]$

$F'(x) = \frac{1}{x}$

قضیه مقدار میانگین: $\frac{1}{c} = \frac{Ln\,a - Ln\,b}{a-b} = \frac{Ln\frac{a}{b}}{a-b}$

$c \in (b,a) \Rightarrow b<c<a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{Ln\frac{a}{b}}{a-b} < \frac{1}{b} \quad \times(a-b)$

$\frac{a-b}{a} < Ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

مثال: اگر $\begin{cases} y = t^2 - \sin t \\ x = e^{2t} - \ln t \end{cases}$ باشد، مطلوبست محاسبه y' ؟

$$y' = \frac{2t - \cos t}{3e^{3t} - \frac{1}{t}}$$

کاربرد مشتق

قضیه رول: فرض کنید $F(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ و مشتق پذیر روی (a,b) باشد و نیز $F(a) = F(b)$. در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد که $F'(c) = 0$.

مثال: تحقیق کنید کدام یک از توابع زیر در شرایط قضیه رول صدق می‌کند و سپس c را بیابید؟

$1)\ F(x) = 1 - |x|\ ,\ [-1,1]$ شرایط قضیه رول صدق نمی‌کند، چون مشتق پذیر نیست

$2)\ F(x) = x^2 + 1\ ,\ [-1,1]$ در شرایط قضیه رول صدق می‌کند $\Rightarrow c = 0$

$3)\ F(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\ ,\ [-2,2] \Rightarrow x = c = 0 \Leftarrow \begin{cases} F'(x) = \dfrac{(2x)(x^4+1) - (4x^3)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}\ ,\ F(2) = F(-2) = \dfrac{5}{17} \\ F'(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^4+1-2x^2(x^2+1)) = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$

قضیه مقدار میانگین: فرض کنید $F(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ و مشتق پذیر روی (a,b) باشد.

در این صورت: $\exists c \in (a,b) \Rightarrow F'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

مثال: آیا توابع زیر شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد؟ اگر دارد، c را بیابید؟

$F(x) = x^2\ ,\ [3,4] \Rightarrow F'(x) = 2x\ ,\ F'(c) = \dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \dfrac{16 - 9}{1} = 7$

$\Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

2000

تذکر: اگر بین عبارت‌ها، اعمال ضرب و تقسیم وجود داشته باشد، مشتق با Ln گیری از طرفین به راحتی انجام می‌شود.

$$3)\ y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x^2-2)^3}\,\sqrt[3]{(x-3)^7}} = \frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x^2-2)^{\frac{3}{4}}(x-3)^{\frac{7}{3}}} \xrightarrow{Ln} Ln\,y = Ln\,\frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x^2-2)^{\frac{3}{4}}(x-3)^{\frac{7}{3}}}$$

$$= Ln(x-1)^{\frac{2}{5}} - Ln(x^2-2)^{\frac{3}{4}} - Ln(x-3)^{\frac{7}{3}} = \frac{2}{5}Ln(x-1) - \frac{3}{4}Ln(x^2-2) - \frac{7}{3}Ln(x-3)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\times\frac{2x}{x^2-2} - \frac{7}{3}\times\frac{1}{x-3} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x^2-2)^3}\,\sqrt[3]{(x-3)^7}}\left(\frac{2}{5(x-1)} - \frac{3x}{2(x^2-2)} - \frac{7}{3(x-3)}\right)$$

فرم صریح: $y=f(x)$ ، فرم ضمنی: $f(x,y)=0 \Rightarrow y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$

F'_x ← مشتق نسبت به x با فرض y عدد

F'_y ← مشتق نسبت به y با فرض x عدد

مثال: y' را بیابید؟

$$1)\ x^3\cos(4y) = 2y^3x - tg\,y^2 + 5 \Rightarrow x^3\cos(4y) - 2y^3x + tg\,y^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2\cos(4y) - 2y^3}{-4x^3\sin(4y) - 6xy^2 + 2y(1+tg^2(y^2))}$$

$$2)\ tg(xy^3) + x^y = Ln(x^2+y^2) \Rightarrow tg(xy^3) + x^y - Ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y^3(1+tg^2(xy^3)) + yx^{y-1} - \frac{2x}{x^2+y^2}}{3xy^2(1+tg^2(xy^3)) + x^y\,Ln\,x - \frac{2y}{x^2+y^2}}$$

مشتق تابع پارامتری: تابعی به شکل $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ را تابع پارامتری و t را پارامتر می‌گوییم.

در توابع پارامتری y' از فرمول زیر به دست می‌آید: $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$

(۱۳) $y=a^u \Rightarrow y'=u'a^u \ln a$

۱۴) $y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

۱۵) $y=\sinh u \Rightarrow y'=u'\cosh u$

(۱۶) $y=\cosh u \Rightarrow y'=u'\sinh u$

(۱۷) $y=\tgh u \Rightarrow y'=u'(1-\tgh^2 u)$

۱۸) $y=\coth u \Rightarrow y'=u'(1-\coth^2 u)$

۱۹) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۲۰) $y=\overset{\text{ثابت}}{c}u \Rightarrow y'=cu'$

۲۱) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۲۲) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

۲۳) $y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u'u}{|u|}$

(۲۴) $y=u^v \Rightarrow y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$

مثال ۷: $y=\sec(x^5+\tan x) \Rightarrow y'=(5x^4+1+\tan^2 x)\sec(x^5+\tan x)\tan(x^5+\tan x)$

مثال ۸: $y=\arcsin(\tan x) \Rightarrow y'=\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

مثال: $y=(\cos x)^{\sin x} \Rightarrow y'=?$

$y=u^v \Rightarrow y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$

معمولی: $y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x+\frac{-\sin x}{\cos x}\sin x\right)$

جبری: $y=(\cos x)^{\sin x} \xrightarrow{\ln} \ln y=\ln(\cos x)^{\sin x}=\sin x\ln\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y}=\cos x\ln\cos x+\frac{-\sin^2 x}{\cos x}$

$\Rightarrow y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

مثال: y' را بیابید.

1) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x} \Rightarrow y'=\frac{(\cos x-\cos x+x\sin x)(\text{مخرج})-(-\sin x+\sin x+x\cos x)(\text{صورت})}{(\cos x+x\sin x)^2}$

2) $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3} \xrightarrow{\ln} \ln y=\ln\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}=\ln x-\ln(1-x)^2(1+x)^3=\ln x-\ln(1-x)^2-\ln(1+x)^3$

$=\ln x-2\ln(1-x)-3\ln(1+x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x} \Rightarrow y'=\left(\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x}\right)$

توابع هیپربولیک (هذلولوی):

سینوس هیپربولیک: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

کسینوس هیپربولیک: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

تانژانت هیپربولیک: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

کتانژانت هیپربولیک: $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

خواص توابع هیپربولیک: ۱) $\cosh x + \sinh x = e^x$ ۲) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

۳) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

مشتق: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

فرمول های مشتق گیری: u تابع برحسب x ($u = u(x)$)

$y = 5 \Rightarrow y' = 0$ ۱) $y = C \Rightarrow y' = 0$	$y = x^{-4} \Rightarrow y' = -4x^{-5}$ ۲) $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$ $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$	$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$ $y = \sin(x^{-2}) \Rightarrow y' = -2x^{-3}\cos x^{-2}$ ۳) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
$y = \cos(x^{-1}) \Rightarrow y' = -(-1)x^{-2}\sin x^{-1}$ ۴) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$	$y = tg x^2 \Rightarrow y' = 2x(1 + tg^2 x^2)$ ۵) $y = tg u \Rightarrow y' = u'(1 + tg^2 u) = u' \sec^2 u$	۶) $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u$
۷) $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \, tg u$	۸) $y = \operatorname{Arcsin} u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	۹) $y = \operatorname{Arccos} u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \operatorname{Arctg} x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$ ۱۰) $y = \operatorname{Arctg} u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	۱۱) $y = \operatorname{Arccotg} u = \dfrac{-u'}{1+u^2}$	$y = e^{\cos x^2} \Rightarrow y' = e^{\cos x^2} \times 2x$ ۱۲) $y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$ $y = e^{(\sin x^2 + 2x)}$ $\Rightarrow y' = (2x \cos x^2 + 2)$

معرفی توابع نمایی و لگاریتمی: تابع $y=e^x$ را تابع نمایی می‌نامند که در آن e عدد نپر است که $e=۲,۷۸$.

x	0	1	$-\infty$	$+\infty$
e^x	1	e	0	$+\infty$

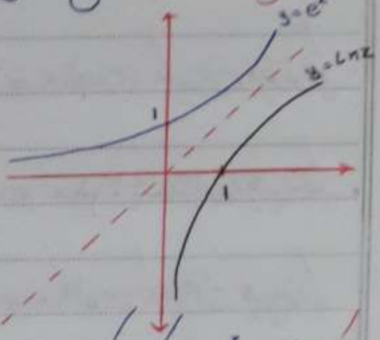
$D_y=\mathbb{R}$

$R_y=(0,+\infty)$

x	0	1	$+\infty$
Lnx	$-\infty$	0	$+\infty$

$D_y=(0,+\infty)$

$R_y=\mathbb{R}$



نکته: تابع $y=e^x$ یک به یک است پس معکوس دارد و تابع معکوس آن را با $y=Lnx$ نشان می‌دهند

تذکر: $f(x)=e^x \Rightarrow f^{-1}(x)=Ln(x)$, $f(f^{-1}(x))=x \Rightarrow e^{Lnx}=x$

$$f^{-1}(f(x))=x \Rightarrow Ln\,e^x=x$$

خواص تابع نمایی و لگاریتمی:

۱) $e^{x+y}=e^x e^y$ ۲) $Ln(xy)=Lnx+Lny$

۳) $Ln\left(\frac{x}{y}\right)=Lnx-Lny$ ۴) $Ln\,x^y=yLnx$

مثال: $e^{۲Ln۳}$ را محاسبه کنید؟

$e^{2Ln3}=e^{Ln9}=9$

مثال: $e^{۳Ln۲+۲Ln۵}$ را محاسبه کنید!

$e^{3Ln2+2Ln5}=e^{Ln8+Ln25}=e^{Ln8}\,e^{Ln25}=8\times25=200$

تمرین: اگر $z=1+i$ ، ریشه معادله $z^7+az^5+b=0$ باشد ، مقادیر حقیقی $\overset{-2}{a}$ ، $\overset{-16}{b}$ را بیابید؟

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\,)^7} (1+i)^7 = 8\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8-8i$

$\xrightarrow{(\,)^5} (1+i)^5 = 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}} = -4-4i$

$8-8i-4a-4ai+b=0 \Rightarrow \begin{cases} -8-4a=0 \Rightarrow a=-2 \\ 8-4a+b=0 \Rightarrow b=-16 \end{cases}$

تمرین: برای هر عدد طبیعی n و $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ نشان دهید:

$$\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n = \frac{1+i\,tg(n\alpha)}{1-i\,tg(n\alpha)}$$

۱: چپ n راست: $1+i\,tg\alpha \rightarrow re^{i\theta} \Rightarrow r=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}\ ,\ \theta \overset{\text{ربع ۱}}{=} Arctg\left(\frac{tg\alpha}{1}\right)=\alpha$

$\Rightarrow z=\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha} \xrightarrow{(\,)^n} z^n=\left(\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}\right)^n=\frac{1}{\cos n\alpha}e^{in\alpha}=\frac{1}{\cos n\alpha}(\cos n\alpha+i\sin(n\alpha))=1+i\,tg(n\alpha)$

$1-i\,tg\alpha \rightarrow re^{i\theta} \Rightarrow r=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}\ ,\ \theta \overset{\text{ربع ۴}}{=} Arctg\left(\frac{-tg\alpha}{1}\right)=-\alpha$

$\Rightarrow z=\frac{1}{\cos\alpha}e^{-i\alpha} \xrightarrow{(\,)^n} z^n=\left(\frac{1}{\cos\alpha}e^{-i\alpha}\right)^n=\frac{1}{\cos n\alpha}e^{-in\alpha}=\frac{1}{\cos(n\alpha)}(\cos(n\alpha)-i\sin(n\alpha))=1-i\,tg\,n\alpha$

$\Rightarrow \left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n=\frac{(1+i\,tg\alpha)^n}{(1-i\,tg\alpha)^n}=\frac{1+i\,tg(n\alpha)}{1-i\,tg(n\alpha)}$

ج) $z_0=-1,\ z_1=-e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_2=-e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$z_0=-\sqrt[3]{2},\ z_1=-\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_2=-\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Year　Month　Date　( )　Subject:

تمرین: هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt[3]{-8i} \Rightarrow z^3=-8i$

$r=\sqrt{8^2}=8,\ \theta \xrightarrow{x=0,\ y<0} -\frac{\pi}{2},\ n=3$

$z_0=\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{3}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_1=\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{3}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2=\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{3}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب) $z^5=32 \Rightarrow r=\sqrt{32^2}=32,\ \theta \xrightarrow{x>0} Arctg\left(\frac{0}{32}\right)=0,\ n=5$

$z_0=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{5}+\frac{0}{5}\right)}=2e^{i(0)}=2$

$z_1=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{5}+\frac{0}{5}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$z_2=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{5}+\frac{0}{5}\right)}=2e^{i\frac{4\pi}{5}}$

$z_3=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{2(3)\pi}{5}+\frac{0}{5}\right)}=2e^{\frac{6\pi}{5}}$

$z_4=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{2(4)\pi}{5}+\frac{0}{5}\right)}=2e^{i\frac{8\pi}{5}}$

ج) $z^6+3z^3+2=0 \xrightarrow{z^3=w} w^2+3w+2=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-8=1$

$w_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\mp1}{2} < \begin{matrix} w_1=-2 \\ w_2=-1 \end{matrix}$

حل معادله $z^3=-2$:

$r=\sqrt{(-2)^2}=2,\ \theta \xrightarrow{x<0} \pi+Arctg\left(\frac{0}{-2}\right)=\pi,\ n=3$

$z_0=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_1=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{2}\,e^{i\pi}$

$z_2=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

حل معادله $z^3=-1$:

$r=\sqrt{(-1)^2}=1,\ \theta \xrightarrow{x<0} \pi+Arctg\left(\frac{0}{-1}\right)=\pi,\ n=3$

$z_0=\sqrt[3]{1}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_1=\sqrt[3]{1}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\pi}$

$z_2=\sqrt[3]{1}\,e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

تمرین: هر یک از عبارات زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید؟

الف) $\frac{2+3i}{3-2i}+\frac{3-2i}{2-3i}=\frac{(2+3i)(2-3i)+(3-2i)(3-2i)}{(3-2i)(2-3i)}=\frac{\cancel{4}-9i^2+9+\cancel{4i^2}-12i}{\cancel{6}-9i-4i+\cancel{6i^2}}$

$=\frac{18-12i}{-13i}\times\frac{13i}{13i}=\frac{13(18i-12i^2)}{-169i^2}=\frac{\cancel{13}(18i+12)}{\cancel{169}_{13}}\neq\frac{12}{13}-\frac{18}{13}i$

$=\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$

ب) $\left(1-\frac{1}{2+5i}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{i}}{2+\frac{5i-1}{3-4i}}\right)=\frac{(1+5i)}{(2+5i)}\times\frac{(1+7i)}{(3+5i)}=\frac{1+7i+5i+35i^2}{6+10i+15i+25i^2}=\frac{12i-34}{25i-19}\times\frac{25i+19}{25i+19}$

$\frac{300i^2+228i-850i-646}{625i^2+\cancel{475i}-\cancel{475i}-361}=\frac{-946-622i}{-986}=\frac{\cancel{2}(473+311i)}{\cancel{2}\times 493}=\frac{473}{493}+\frac{311}{493}i$

$1-\frac{1}{i}=\frac{i-1}{i}$

$\Rightarrow\frac{\frac{i-1}{i}}{\frac{5-3i}{3-4i}}=\frac{(i-1)(3-4i)}{i(5-3i)}=\frac{3i-4i^2-3+4i}{5i-3i^2}=\frac{1+7i}{3+5i}$

$2+\frac{5i-1}{3-4i}=\frac{6-8i+5i-1}{3-4i}=\frac{5-3i}{3-4i}$

$1-\frac{1}{2+5i}=\frac{2+5i-1}{2+5i}=\frac{1+5i}{2+5i}$

ج) $(\sqrt{3}-i)^3=(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^3=8e^{-i\frac{\pi}{2}}=8(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=-8i$

$\sqrt{3}-i\rightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2\ ,\ \theta\stackrel{?}{=}Arctg(\frac{-1}{\sqrt{3}})=-Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$

د) $\frac{(1-i)^2(3+i\sqrt{3})^3}{(-1+i\sqrt{3})^4}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}\times\cancel{24}\sqrt{3}\,e^{i\frac{3\pi}{6}}}{\cancel{16}e^{i\frac{8\pi}{3}}}=3\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{8\pi}{3}}}=3e^{i\frac{19\pi}{12}}$

$-1+i\sqrt{3}\rightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2,\ \theta\stackrel{?}{=}\pi+Arctg(\frac{\sqrt{3}}{-1})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\rightarrow z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow z^4=16e^{i\frac{8\pi}{3}}$

$1-i\rightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ ,\ \theta\stackrel{?}{=}Arctg(\frac{-1}{1})=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\rightarrow z^2=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$3+i\sqrt{3}\rightarrow re^{i\theta}\Rightarrow r=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3},\ \theta\stackrel{?}{=}Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\rightarrow z^3=24\sqrt{3}\,e^{i\frac{3\pi}{6}}$

تذکر: برای به دست آوردن ریشه‌های معادله‌ی $z^n=w$، باید ابتدا w را به صورت قطبی بنویسیم و سپس از فرمول گفته شده استفاده می‌کنیم.

مثال: ریشه‌های معادله $z^2=i$ را بیابید.

$$i \to re^{i\theta} \Rightarrow n=2,\ r=\sqrt{0+1}=1,\ \theta \xrightarrow{x=0,\ y>0} \frac{\pi}{2}$$

$$z_0=\sqrt{1}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{\pi/2}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$z_1=\sqrt{1}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{\pi/2}{2}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}=\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

تذکر: $\sqrt[n]{w}$ همان ریشه‌های معادله‌ی $z^n=w$ است.

مثال: $\sqrt[4]{-16}$ را در اعداد مختلط حساب کنید.

$$z^4=-16 \Rightarrow -16 \to re^{i\theta}$$

$$r=\sqrt{(-16)^2+0}=16,\ \theta \xrightarrow{x<0} \pi+\text{Arctg}\left(\frac{0}{-16}\right)=\pi,\ n=4$$

$$z_0=\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2=\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{2(2)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_1=\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad z_3=\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{2(3)\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $z^4-2z^2+4=0$ را بیابید.

$$z^2=w \Rightarrow w^2-2w+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=4-16=-12,\quad w_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\underbrace{\sqrt{-12=12i^2}}_{2\sqrt3 i}}{2}=1\mp\sqrt3\, i=z^2$$

حل معادله $z^2=1+\sqrt3\, i$:

$$1+\sqrt3\, i \to re^{i\theta},\ n=2,\ r=\sqrt{1+3}=2,\ \theta \xrightarrow{x>0} \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt3}{1}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$z_0=\sqrt2\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{\pi/3}{2}\right)}=\sqrt2\,e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt2\left(\frac{\sqrt3}{2}+i\frac12\right)=\frac{\sqrt6}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$z_1=\sqrt2\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{\pi/3}{2}\right)}=\sqrt2\,e^{i\frac{7\pi}{6}}=\sqrt2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt2\left(-\frac{\sqrt3}{2}-i\frac12\right)=-\frac{\sqrt6}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

حل معادله $z^2=1-\sqrt3\, i$:

$$1-\sqrt3\, i \to re^{i\theta},\ n=2,\ r=\sqrt{1+3}=2,\ \theta \xrightarrow{x>0} \text{Arctg}\left(\frac{-\sqrt3}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$z_0=\sqrt2\,e^{i\left(\frac{2(0)\pi}{2}+\frac{-\pi/3}{2}\right)}=\sqrt2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt2\left(\frac{\sqrt3}{2}-i\frac12\right)=\frac{\sqrt6}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$z_1=\sqrt2\,e^{i\left(\frac{2(1)\pi}{2}+\frac{-\pi/3}{2}\right)}=\sqrt2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt2\left(-\frac{\sqrt3}{2}+i\frac12\right)=-\frac{\sqrt6}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})^4(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^4}=\frac{\overset{2}{\cancel{16}}e^{i\frac{4\pi}{3}}\times\cancel{4}\sqrt{2}\,e^{-\frac{5\pi}{4}i}}{\cancel{8}e^{-\pi i}\times\cancel{4}e^{i\pi}}=2\sqrt{2}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\underset{1}{\cancel{e}}}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\xrightarrow{*}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)$$

$$*\begin{cases}\cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\\[2mm] \sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\end{cases}$$

چندجمله‌ای مختلط: چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots\dots+a_1x+a_0$ را چندجمله‌ای مختلط گوییم هرگاه $a_0,\dots,a_n$ اعداد مختلط باشند.

معادله دوجمله‌ای مختلط: معادله $z^n=w$ را یک معادله دوجمله‌ای مختلط از درجه n گوییم که در آن w عدد مختلط معلوم و z عدد مختلط مجهول است.

حل معادله $z^n=w$: فرض کنید $w=re^{i\theta}$ و $z=\rho e^{i\alpha}$:

$$z^n=w\Rightarrow(\rho e^{i\alpha})^n=re^{i\theta}\Rightarrow\rho^n e^{in\alpha}=re^{i\theta}=re^{i(2k\pi+\theta)}$$

$$\Rightarrow\rho^n=r,\ n\alpha=2k\pi+\theta;\ k=0,\pm1,\dots\Rightarrow\rho=\sqrt[n]{r},\ \alpha=\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n};\ k=0,\pm1,\dots$$

بنابراین تعداد ریشه‌های معادله دوجمله‌ای $z^n=w$، برابر n تاست که آن‌ها را با z_k نشان داده و از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)};\ k=0,\pm1,\dots,n-1$$

مثال: عدد مختلط $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^4}$ را بصورت دکارتی بنویسید ؟

$1-i \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\,)^3} (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad ①$$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$

$1+i \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\,)^4} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi} \quad ②$$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$$\xrightarrow{1,2} \frac{(1-i)^3}{(1+i)^4} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\cancel{4}_{2}\, e^{i\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\overset{2\pi-\frac{\pi}{4}}{\frac{7\pi}{4}}\right) - i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

مثال: $\frac{(1+i\sqrt{3})^4(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^4}$ را بصورت $x+iy$ بنویسید ؟

$1+i\sqrt{3} \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow z=2e^{i\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{(\,)^4} (2e^{i\frac{\pi}{3}})^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$1-i \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\,)^5} (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^5 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$

$1-i\sqrt{3} \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow z=2e^{-i\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{(\,)^3} (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}}$$

$1+i \to re^{i\theta}$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\,)^4} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi}$$

ج) $Z = 1 - i \to r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$, $\theta \overset{x>0}{=} Arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = -Arctg 1 = -\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow Z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

د) $Z = \sqrt{3} + 3i \to r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\theta \overset{x>0}{=} Arctg\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = Arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow Z = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

توان رسانی یک عدد مختلط: ابتدا آن را به فرم قطبی می‌نویسیم وسپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

فرمول دموآور: $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

یادآوری: فرض کنید $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ در این صورت:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6}: & \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4}: & \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3}: & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\cos(2k\pi + \theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(2k\pi + \theta) = \sin\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

بنابراین:

$$e^{i(2k\pi + \theta)} = e^{i\theta}$$

مثال: $(1+i)^{100}$ را به دست آورید.

$1 + i \to re^{i\theta}$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta \overset{x>0}{=} Arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\to Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{(\ )^{100}} \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} = 2^{50} e^{i25\pi} = 2^{50}\left(\cos\underbrace{25\pi}_{24\pi+\theta} + i\sin 25\pi\right)$$

$$= 2^{50}\left(-1 + i(0)\right) = -2^{50}$$

θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$Arctg\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

تذکر: $Arctg(-\theta) = -Arctg\theta$

مثال: عدد مختلط $z=3-i\sqrt{3}$ را به فرم قطبی بنویسید؟

$$z=3-i\sqrt{3} \xrightarrow{?} z=re^{i\theta}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z=2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\theta \xrightarrow{x>0} Arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

مثال: عدد مختلط $z=-1-i$ را به فرم قطبی بنویسید؟

$$z=-1-i \xrightarrow{?} z=re^{i\theta}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\theta \xrightarrow{x<0} \pi+Arctg\left(\frac{-1}{-1}\right)=\pi+Arctg 1=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

تمرین: $(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

تمرین: $\dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

تمرین: اعداد زیر را به فرم قطبی بنویسید؟

الف) $z=4i$: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16}=4$ ، $\theta \xrightarrow{x=0,\, y>0} \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow z=4e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) $z=-2i$: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$ ، $\theta \xrightarrow{x=0,\, y<0} -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow z=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Year. Month. Date. ( ) Subject:

تذکر: $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ مزدوج یکدیگرند

تبدیل نمایش قطبی به نمایش دکارتی: از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم

$z = re^{i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$

مثال: عدد مختلط $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ را به صورت دکارتی بنویسید؟ $z = re^{-i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

مثال: عدد مختلط $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ را به صورت دکارتی بنویسید؟ $z = re^{i\theta} \xrightarrow{?} z = x + iy$

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

تبدیل نمایش دکارتی به قطبی:

$z = x + iy \xrightarrow{?} z = re^{i\theta}$

از فرمول های زیر استفاده می‌کنیم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \pi + \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

تذکر: $z\bar{z}=|z|^2$

اثبات: $\begin{cases} z=x+iy \\ \bar{z}=x-iy \end{cases} \Rightarrow z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-ixy+ixy+y^2=x^2+y^2=|z|^2$

$\Rightarrow z\bar{z}=|z|^2$

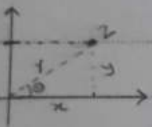
تمرین:

$$\frac{2(\frac{3}{2}-i)+(1+i)(2-i)}{\underbrace{(\sqrt{3}-i)^2}_{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}}=\frac{(3-2i)+(2-i+2i-i^2)}{3-2\sqrt{3}i+i^2}=\frac{6-i}{2-2\sqrt{3}i}\times\frac{2+2\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{12+12\sqrt{3}i-2i-2\sqrt{3}i^2}{4-12i^2}=\frac{12+12\sqrt{3}i}{16}+\frac{2\sqrt{3}-2i}{16}\neq\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}i\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{8}i\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i\right)$$

نمایش قطبی اعداد مختلط:



$\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cos\theta$

$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\sin\theta$

$\Rightarrow z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}\Rightarrow$ نمایش قطبی: $z=re^{i\theta}$

نکته: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$: فرمول اویلر

تذکر: در نمایش قطبی $z=re^{i\theta}$ ، r را قدر مطلق z می‌نامیم. زیرا $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

همچنین θ را آرگومان z می‌نامیم و با $Arg(z)$ نشان می‌دهیم

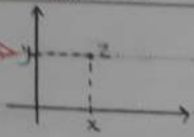
مثال: $e^{-i\theta}$ را به دست آورید.

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \xrightarrow{\theta=-\theta} e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

$\Rightarrow e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

نمایش اعداد مختلط (دکارتی):

$Z = x + iy \Rightarrow$

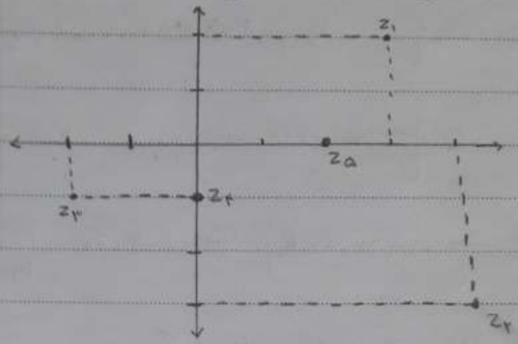


مثال: هر یک از اعداد مختلط زیر را به صورت دکارتی نشان دهید؟

$Z_1 = 3 + 2i \quad , \quad Z_2 = 4 - 3i$

$Z_3 = -2 - i \quad , \quad Z_4 = -i$

$Z_5 = 2$



عملیات روی اعداد مختلط:

۱) جمع دو عدد مختلط: حقیقی ها (x) باهم و موهومی ها (y) را باهم جمع می کنیم

۲) ضرب دو عدد مختلط: مؤلفه به مؤلفه ضرب کرده و از $i^2 = -1$ استفاده می کنیم

۳) تقسیم دو عدد مختلط: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم

مثال: فرض کنید $Z_1 = 2 - i$ و $Z_2 = 3 + 2i$ مطلوبست محاسبه $Z_1 + Z_2$ ، $2Z_1 - 3Z_2$ ، $Z_1 Z_2$ ، $\frac{Z_1}{Z_2}$ ؟

$Z_1 + Z_2 = (2 - i) + (3 + 2i) = 5 + i$

$2Z_1 - 3Z_2 = 2(2 - i) - 3(3 + 2i) = (4 - 2i) - (9 + 6i) = -5 - 8i$

$Z_1 Z_2 = (2 - i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 8 + i$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(2 - i)}{(3 + 2i)} \times \frac{(3 - 2i)}{(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i - 3i + 2i^2}{9 - \cancel{6i} + \cancel{6i} - 4i^2} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{14} - \frac{7}{14} i$

فصل اول: اعداد مختلط

فلسفه پیدایش اعداد مختلط: $W=\{0,1,2,\dots\}$ حسابی و $\bar{N}=\{1,2,3,\dots\}$ طبیعی

در اعداد حسابی ریشه ندارد $x-2=0 \Rightarrow x=2\in W$, $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$

در اعداد صحیح ریشه ندارد $Z=\{\dots,-1,0,1,\dots\}$ صحیح , $2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{2}$

$Q=\{\frac{m}{n}: m,n\in Z , n\neq 0\}$ گویا , $R=Q\cup Q^c$ حقیقی (گنگ) , $x^2+1=0 \xrightarrow{\text{اسم ریشه } i} i^2=-1$

مجموعه اعداد مختلط (C): $C=\{x+iy: x,y\in R\} \xrightarrow{\text{مثال}} z=3-2i \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

تذکر: $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq C$

تعریف: فرض کنید $z=x+iy$ باشد. در این صورت:

قسمت موهومی z: $Im(z)=y$ ‌ ‌ ‌ ‌ قسمت حقیقی z: $Re(z)=x$

قدر مطلق z: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ‌ ‌ ‌ ‌ مزدوج z: $\bar{z}=x-iy$

مثال: فرض کنید $z=\sqrt{2}+\frac{5}{6}i$ ‌ ‌ $Re(z)=\sqrt{2}$, $Im(z)=\frac{5}{6}$

$\bar{z}=\sqrt{2}-\frac{5}{6}i$, $|z|=\sqrt{2+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{97}{36}}=\frac{\sqrt{97}}{6}$