ریاضی عمومی (۲)

مجموعهٔ دروس عمومی

دکتر محمدصادق معتقدی

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

ویرایش چهارم: بهار ۸۶ | تیراژ: ۱۰۰۰۰ نسخه |
شابک: ۳ـ۳۷ـ ۸۷۱۹ ـ۹۶۴ | ISBN: 964 – 8719 – 37 – 3

نشانی: بالاتر از میدان ولی‌عصر | کوچه دانش‌کیان | ساختمان پارسه | تلفن: ۸۸۸۴۹۲۱۱

مقدمه

جزوه حاضر با تکیه بر:

۱ـ مفاهیم اولیه و خلاصه درس

۲ـ تشریح مسایل

به منظور آماده‌سازی برای آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد تهیه و تنظیم شده است.

علاقه‌مندان برای حل تست‌های بیشتر می‌توانند به کتب ریاضی عمومی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی تألیف محمدصادق معتقدی که توسط مؤسسه آموزش عالی پارسه به چاپ رسیده مراجعه نمایند.

دکتر محمدرضا معتقدی

بهار ۱۳۸۶

دانشجویان محترم!

برای کسب آمادگی بیشتر می‌توانید به کتب اینجانب که توسط مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه به چاپ رسیده و در نمایندگی‌های مؤسسه قابل تهیه می‌باشند، مراجعه نمائید.

۱ـ تست‌های کنکور ریاضی عمومی (۲)

در این کتاب تمامی سؤالات کنکورهای آزاد و سراسری آزمون کارشناسی ارشد مربوط به کلیه رشته‌ها در طی سالیان مختلف با حل کاملاً تشریحی ارائه شده است.

این کتاب به عنوان مرجع حل تمرین در دوره‌های حضوری مؤسسه پارسه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲ـ درس و تست‌های تألیفی ریاضی عمومی (۲)

در این کتاب مباحث مطرح شده در جزوه موجود ما با جزئیات بسیار کامل‌تر مطرح شده و در طی هر بحث تعداد قابل ملاحظه‌ای از تست‌های تألیفی که مشابه تست‌های کنکور می‌باشد ارائه شده است.

این کتاب به عنوان مرجع درسی در اختیار دانشجویان دوره‌های حضوری مؤسسه پارسه قرار می‌گیرد.

محمدصادق معتقدی
بهمن‌ماه ۱۳۸۵

فصل اول توابع دومتغیره

فصل دوم توابع برداری

فصل سوم انتگرال‌های دوگانه

فصل چهارم انتگرال‌های سه‌گانه

فصل پنجم انتگرال‌های منحنی الخط

فصل ششم انتگرال سطح

فصل اول

توابع دومتغیره

۱) حد توابع دومتغیره:

می‌گوییم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ می باشد هر گاه بتوان استلزام منطقی زیر را نشان داد:

$$\forall \beta>0 \ \exists \alpha>0 \ ; \ 0<\left|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right|<\alpha \longrightarrow \left|f(x,y)-L\right|<\beta$$

اما چنانچه در ارتباط با یک حد دومتغیره نمی‌خواهیم از معنای فوق استفاده کنیم ممکن است بحث‌های زیر مفید باشد:

چنانچه به جای (x,y) به ترتیب مقادیر (x_0,y_0) را داخل ضابطه f قرار دهیم و با مشکل محاسباتی برخورد نکنیم، حاصل حد را بدون هیچ مشکلی یافته‌ایم ولی چنانچه با این کار به یکی از صور مبهم مانند $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم، باید حاصل حد را پس از رفع ابهام آن بدست آوریم به هر حال توجه به این نکته مهم است که در یک مسئله حد دومتغیره، حاصل حد در صورت وجود باید منحصر به فرد باشد بنابراین چنانچه در یک چنین مسئله‌ای با دو رویکرد مختلف به دو جواب مختلف برسیم، حاصل حد، موجود نخواهد بود.

نکته ۱: در بسیاری مواقع در یک حد دومتغیره که قرار است $(x,y)\to(x_0,y_0)$، با عنایت به این موضوع که اگر از دو مسیر متفاوت به نقطه (x_0,y_0) نزدیک شویم و به دو نتیجه مختلف برسیم، می‌توان بر عدم موجود بودن حد مورد نظر مطمئن بود.

نکته ۲: در بسیاری از حدهای دومتغیره که $(x,y)\to(0,0)$ و مسئله به حالت ابهام رسیده است استفاده از دستگاه مختصات قطبی یعنی تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ ؛ $y=r\sin\theta$، می‌تواند مناسب باشد به خصوص در این شرایط که $r\to 0, \forall\theta$ مقدار حد می‌تواند هر مقدار باشد ولی اگر جواب مسئله به θ وابسته شد حد مذکور موجود نخواهد بود.

مسائل حل شده:

مثال: حاصل حدود زیر را بدست آورید؟

$$I_1=\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^2-xy+y^3}{x^2-y+1}$$

حل: ابتدا مقادیر (x_0,y_0) را جایگذاری می‌کنیم اگر حاصل حد بدست آمد که مسئله حل شده است، ولی اگر به موارد $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم آنگاه با توجه به نکات گفته شده باید رفع ابهام کنیم.

لذا خواهیم داشت:

$$I_1=\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y+1}=\frac{4-2+1}{4-1+1}=\frac{3}{4}\to$$ هیچ مشکلی ندارد.

$$I_2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-3y^2}{x+y^2}$$

حل: ابتدا مقادیر (x_0,y_0) را جایگذاری می‌کنیم تا وضعیت حد مشخص شود، با جایگذاری مقادیر (x_0,y_0) به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که باید رفع ابهام کنیم. لذا با تعویض ترتیب میل کردن متغیرها به سمت $(0,0)$ داریم:

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2-3y^2}{x+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0\\&(2)\quad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2-3y^2}{x+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{-3y^2}{y^2}=-3\end{aligned}\right\}\to$$

چون $(0\neq-3)\Leftarrow$ بنابراین حد فوق موجود نمی‌باشد.

$$I_3=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^4}$$

حل: ابتدا مقادیر (x_0,y_0) را جایگذاری می‌کنیم که مسلماً به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. پس باید ابتدا از روش تغییر میل کردن متغیرها استفاده کنیم لذا خواهیم داشت:

$$(1)\quad I_3=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^3y}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^4}=0$$

$$(2)\quad I_3=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^3y}{x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^4}=0$$

چون حاصل دو حد از دو طریق تغییر میل‌کردن متغیرها صفر شده است، لذا ابتدا این شبهه پیش می‌آید که حاصل حد مذکور صفر است، برای اینکه این شبهه بر طرف شود و جواب صحیح را پیدا کنیم از نکته ۱ استفاده می‌کنیم و روی خط $y=mx$، به نقطه $(0,0)$ نزدیک می‌شویم که اگر حاصل حد پس از این تغییر متغیر وابسته به m باشد حد فوق موجود نیست.

لذا خواهیم داشت:

$$I_3=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^4}\xrightarrow[x\to0]{y=mx}I_3=\lim_{x\to0}\frac{mx^4}{x^4+m^4x^4}=\frac{m}{1+m^4}$$

جواب فوق وابسته به m است لذا حد مذکور موجود نمی‌باشد.

$$I_4 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

حل: بدیهی است با جایگذاری مقادیر (x_0,y_0) به این نکته می‌رسیم که حد فوق از نوع $\frac{0}{0}$ است و اگر روی مسیر $y=mx$ به $(0,0)$ نزدیک شویم، خواهیم داشت:

$$I_4 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \xrightarrow[x\to 0]{y=mx} I_4 = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = 0$$

جواب مستقل از m است اما نمی‌توان بر وجود حد مطمئن بود لذا برای مطمئن شدن از روی مسیر $y^2=x$ به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم. خواهیم داشت:

$$I_4 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \xrightarrow[y\to 0]{x=y^2} I_4 = \lim_{y\to 0} \frac{y^2.y^2}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

لذا حد فوق موجود نخواهد بود.

$$I_5 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

حل: بدیهی است با جایگذاری مقادیر (x_0,y_0) به این نکته می رسیم که حد فوق از نوع $\frac{0}{0}$ است. لذا با استفاده از تغییر متغیر در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$I_5 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \xrightarrow[r\to 0,\ \forall\theta]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} I_5 = \lim_{r\to 0;\forall\theta} \frac{r\cos\theta.r\sin\theta}{r^2} = \sin\theta\cos\theta$$

بدیهی است چون جواب حد فوق وابسته به θ است، لذا حد فوق موجود نیست.

$$I_6 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

حل: بدیهی است با جایگذاری مقادیر (x_0,y_0) به این نکته می رسیم که حد فوق از نوع $\frac{0}{0}$ است. لذا با استفاده از تغییر متغیر در دستگاه مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$I_6 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[r\to 0,\ \forall\theta]{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta} I_6 = \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \frac{r\cos\theta.r\sin\theta}{r} = \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} r\sin\theta\cos\theta = (0\times \text{کراندار}) = 0 \to \text{واقعی}$$

توجه: عبارت $\sin\theta\cos\theta$ وابسته به θ است ولی همواره کراندار است.

بدیهی است حد فوق موجود و مقدارش برابر صفر است.

۲) مشتقات جزئی در توابع دومتغیره:

۲-۱) مشتق گیری جزئی در توابع دومتغیره:

در ارتباط با توابع دومتغیره مانند $z=f(x,y)$ بحث مشتقات جزئی به صورت زیر مطرح می‌شود: وقتی می‌نویسیم $\frac{\partial f}{\partial x}$ منظور آن است که می‌خواهیم از f با فرض آنکه y ثابت است نسبت به متغیر x مشتق بگیریم. همین مفاهیم را می‌توان با بیان های ریاضی به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f_x(x,y+\Delta y)-f_x(x,y)}{\Delta y}\end{array}}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید تابع $f(x,y)$ به‌صورت زیر داده شده است. مطلوب است محاسبه $f_x(0,0)$ ؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل: با توجه به وضعیت تعریف تابع و اینکه $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ تعریف نشده است، برای محاسبه f_x در نقطه $(0,0)$ مجاز نیستیم ازاین ضابطه مشتق بگیریم و آن را در $(0,0)$ و حتی در وضعیت حدی $(x,y)\to(0,0)$ به عنوان جواب معرفی کنیم. پس از تعریف مشتق جزئی استفاده می‌کنیم.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)(0)^2}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0$$

مثال ۲: فرض کنید تابع $f(x,y)$ را به‌صورت زیر داریم. مطلوب است محاسبه $f_x(0,0)$ و $f_{xx}(0,0)$ ؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل:

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{\Delta x^3+0}{\Delta x^2+0}-0\right)}{\Delta x}=1$$

$$f_x=\begin{cases}\dfrac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_{xx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(\Delta x,0)-f_x(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

مثال۳: فرض کنید داشته باشیم $f(x,y)=|x^2-y^2|$، مطلوب است وضعیت پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع فوق در نقطه $(0,0)$؟

حل: بدیهی است تابع مورد نظر در نقطه $(0,0)$ پیوسته است چرا که داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x^2-y^2| = 0 \ ; \ f(0,0)=0$$

اما چنانچه بخواهیم وضعیت مشتق‌پذیری تابع فوق را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|(\Delta x)^2|-0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|0-(\Delta y)^2|-0}{\Delta y}=0$$

بنابراین مشتقات f نیز در نقطه $(0,0)$ هم نسبت به x و هم نسبت به y موجود است.

لذا تابع فوق هم پیوسته هم مشتق‌پذیر است.

مثال۴: فرض کنید تابع $f(x,y)$ به‌صورت زیر داده شده است. نشان دهید در مبدا مختصات $f_{xy}\neq f_{yx}$.

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & , \quad x=y=0 \\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$

حل: بدیهی است تابع مورد نظر در نقطه $(0,0)$ پیوسته است چرا که داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(0)\dfrac{\Delta x^2-0}{\Delta x^2+0}}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0(\Delta y)\dfrac{0-\Delta y^2}{0+\Delta y^2}}{\Delta y}=0$$

اما داریم:

$$f_x=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\dfrac{\Delta y^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{+\dfrac{\Delta x^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1$$

چون f_y و f_x در $(0,0)$ پیوسته نیستند، پس نمی‌توان نتیجه گرفت در مبدا، مشتقات جزئی مخلوط مساویند. $\Leftarrow \ f_{xy}\neq f_{yx}$

مثال۵: مشتقات جزئی دوم z_{xx} و z_{yx} و z_{xy} و z_{yy} توابع داده شده را بیابید؟

1) $z = \operatorname{Arc\,tg} xy$

حل:

$$z_x = \frac{y}{1+x^2y^2} \;;\; z_y = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(x^2y^2+1)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$z_{xx} = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \;;\; z_{yy} = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$$

2) $z = \ln(x^2+y^2)$

حل:

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \;;\; z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

مثال۶: مطلوب است محاسبه u_{xxy} به ازای $u(x,y)=2^{xy}$؟

حل:

$$u_x = (y\ln 2)2^{xy} \Rightarrow u_{xx} = y^2(\ln 2)^2.2^{xy}$$

$$u_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}) = 2y(\ln 2)^2 2^{xy} + xy^2(\ln 2)^3 2^{xy} = y(\ln 2)^2.2^{xy}.(2+xy\ln 2)$$

مثال۷: مطلوب است محاسبه u_{xyx} به ازای $u(x,y)=\cos(x+\sin y)$؟

حل:

$$u_x = -\sin(x+\sin y) \Rightarrow u_{xy} = -\cos y.\cos(x+\sin y)$$

$$u_{xyx} = \cos y.\sin(x+\sin y)$$

مثال۸: مطلوب است محاسبه $\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2}$ به ازای $u(x,y)=\sin^2 x.\cos^2 y$؟

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\sin x\cos x\cos^2 y=\sin 2x\cos^2 y\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos 2x\cos^2 y\Rightarrow\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-4\sin 2x\cos^2 y$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=+8\sin 2x.\sin y.\cos y=+4\sin 2x.\sin 2y\Rightarrow\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}=+8\sin 2x\cos 2y$$

۲-۲) قاعده مشتق‌گیری ضمنی در توابع دومتغیره:

فرض کنید داشته باشیم $F(x,y,z)=0$. (در این رابطه دو متغیر می‌توانند مستقل و متغیر سوم باید وابسته باشد.) می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad ;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $\underbrace{x^{z^2+y^3}+y^{xz}-1}_{F(x,y,z)}=0$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial x}{\partial y}$؟

حل:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=-\frac{3y^2x^{z^2+y^3}Lnx+(xz)y^{xz-1}}{(z^2+y^3)x^{z^2+y^3-1}+zy^{xz}.Lny}$$

مثال ۲: فرض کنید داریم $\underbrace{z^x+z^{y^2}-xy+1}_{F(x,y,z)}=0$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$؟

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2y.z^{y^2}.Lnz-x}{xz^{x-1}+y^2.z^{y^2-1}}$$

مثال ۳: در رابطه $\underbrace{x^2z+2y+e^{x-y-2z}}_{F(x,y,z)}=0$ متغیرهای (x,y) مستقل از یکدیگرند. مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,-1,1)$ کدام است؟

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xz+e^{x-y-2z}}{x^2-2e^{x-y-2z}}$$

لذا بدست می‌آید:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1,1)}=\frac{-(+2+e^{1+1-2})}{1-2e^{1+1-2}}=3$$

مثال ۴: فرض کنید $x^3+y^4+z^2=25$، z_x و z_y را در نقطه $(2,-1,4)$ به‌ترتیب با مشتق‌گیری صریح و ضمنی حساب کنید.

حل:

$$x^3+y^4+z^2=25 \Rightarrow z=\pm\sqrt{25-x^3-y^4}\ ,\ z>0 \Rightarrow\ z=\sqrt{25-x^3-y^4}$$

$$z_x=\frac{-3x^2}{2\sqrt{25-x^3-y^4}}\ \Rightarrow\ z_x(2,-1)=\frac{-3\times 4}{2\sqrt{25-8-1}}=\frac{-3}{2}$$

$$z_y=\frac{-4y^3}{2\sqrt{25-x^3-y^4}}\Rightarrow z_y(2,-1)=\frac{+4\times 1}{2\sqrt{25-8-1}}=\frac{1}{2}$$

حال به روش مشتق‌گیری ضمنی نسبت به متغیرهای x و y مشتق‌گیری می‌کنیم.

$$z_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{3x^2}{2z}\Bigg|_{(2,-1,4)}=-\frac{3}{2}$$

$$z_y=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-4y^3}{2z}\Bigg|_{(2,-1,4)}=\frac{1}{2}$$

۲-۳) قضیه اویلر در ارتباط با توابع همگن:

تابع $z=f(x,y)$ را تابعی همگن از درجه α می‌گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\boxed{\forall\lambda>0 \Rightarrow\quad f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}f(x,y)}$$

مطابق قضیه اویلر برای اینگونه توابع داریم:

$$\boxed{x.\frac{\partial f}{\partial x}+y.\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha.f}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $z=\frac{x+y}{x^4y^4}$ مطلوب است محاسبه $I=x\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}$ ؟

حل: بدیهی است z تابعی همگن از درجه $\alpha=-7$ است زیرا:

$$z(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{(\lambda x)^4\cdot(\lambda y)^4}=\frac{\lambda}{\lambda^8}.\frac{x+y}{x^4y^4}=\lambda^{-7}z$$

پس طبق قضیه اویلر داریم:

$$I=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(-7)z$$

مثال ۲: با فرض $z=\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\right)$ حاصل $I=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$ کدام است ؟

حل: بدیهی است z تابع همگن از درجه صفر است زیرا:

$$z(\lambda x,\lambda y)=\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}}{\lambda x+\lambda y}\right)=\lambda^0 z$$

پس طبق قضیه اویلر داریم:

$$I=x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}=0 \longrightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{-y}{x}$$

مثال۳: فرض کنید $w=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$، مطلوب است محاسبه $I=x.\frac{\partial w}{\partial x}+y.\frac{\partial w}{\partial y}+z.\frac{\partial w}{\partial z}$؟

حل: بدیهی است w تابعی همگن از درجه $\alpha=1$ است زیرا:

$$w(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z)}{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2+\lambda^2z^2}=\lambda^1 w$$

پس طبق قضیه اویلر داریم:

$$I=x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial w}{\partial y}+z.\frac{\partial w}{\partial z}=(1).w=w$$

۲-۴) مشتق گیری زنجیره‌ای در توابع چند متغیره:

قواعد مشتق گیری زنجیره‌ای متنوعی در بحث توابع چند متغیره قابل نوشتن است که همگی از یک روال کلی تبعیت کرده و به سادگی قابل تعمیم می‌باشد. به عنوان مثال، $z=f(u,v)$ و اگر $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ در چنین مواردی می‌توان z را تابعی از دو متغیر (x,y) دانست و نشان داد:

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{یا} \quad z_x=z_u.u_x+z_v.v_x \\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{یا} \quad z_y=z_u.u_y+z_v.v_y\end{array}}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $z=u^2+vw+v^2$ و بدانیم $u=x^3-y^2\ ;\ v=xy+x^2\ ;\ w=x+y^2$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$؟

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y}=(2u).(-2y)+(w+2v)(x)+(v)(2y) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-4x^3y+4y^3+x^2+xy^2+2x^2y+2x^3+2xy^2+2x^2y=-4x^3y+3xy^2+4x^2y+2x^3+x^2+4y^3$$

مثال۲: فرض کنید داشته باشیم $f(x,y,z)=Ln(x+y+z)$ و بدانیم $z=t\ ;\ y=\sin^2 t\ ;\ x=\cos^2 t$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial f}{\partial t}$.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{x+y+z}.(-\sin 2t)+\frac{1}{x+y+z}.(\sin 2t)+\frac{1}{x+y+z}.(1)=\frac{1}{x+y+z}$$

مثال۳: اگر $f(x,y)=\int_0^{x^2y}\cos\sqrt{t}\,dt$ باشد $\frac{\partial f}{\partial x}$ را در $(x,y)=(\pi,1)$ بیابید.

حل: با استفاده از قاعده لایب‌نیتز داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\cos\sqrt{x^2y}\ \Big|\xrightarrow{x=\pi\ ;\ y=1}\frac{\partial f}{\partial x}=-2\pi$$

مثال۴: فرض کنید داشته باشیم $F(x^2-y,xz)=0$ چنانچه بدانیم $z=f(x,y)$ حاصل عبارت $I=x\frac{\partial z}{\partial x}+2x^2\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

برای حل مثال فوق به نکته زیر مراجعه می‌کنیم:

نکته: فرض کنید تابع $F(u,v)=0$ که در آن F یک تابع اختیاری، $u=u(x,y,z)$ و $v=v(x,y,z)$ را داریم، چنانچه $z=f(x,y)$ باشد می‌توان نشان داد معادله با مشتقات جزئی که از حذف تابع اختیاری F برای z حاصل می‌شود چنین است:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0\Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0}$$

لذا می‌توانیم با توجه به نکته گفته شده در بالا با فرض $v=xz\ ,\ u=x^2-y$ دترمینان بالا را تشکیل دهیم:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ \begin{vmatrix}2x & -1\\ z+x\frac{\partial z}{\partial x} & x\frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ 2x^2\frac{\partial z}{\partial y}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0\ \rightarrow\ x\frac{\partial z}{\partial x}+2x^2\frac{\partial z}{\partial y}=-z\ \rightarrow\ I=-z$$

مثال۵: اگر شعاع r یک استوانه برابر 25 cm بوده و به میزان 3cm/sec افزایش یابد و ارتفاعش h که 14cm و به میزان 2cm/sec کاهش یابد، حجم و مساحت استوانه در این لحظه چگونه تغییر می‌کند؟

حل:

$$V=\pi r^2h\ ;\ A=2\pi rh+2\pi r^2$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{dA}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=(2\pi h+4\pi r)\frac{dr}{dt}+2\pi r\frac{dh}{dt}$$

با گذاردن مقادیر $r=25$، $h=14$، $\frac{dr}{dt}=3$، $\frac{dh}{dt}=-2$ در این فرمول‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dt}=(2\times\pi\times25\times14\times3)+(\pi\times25^2\times-2)=850\ \pi$$

$$\frac{dA}{dt}=(2\times\pi\times14+4\times\pi\times25)\times3+(2\times\pi\times25\times-2)=284\pi$$

۲-۵) دیفرانسیل کامل یک تابع دومتغیره:

فرض کنید داشته باشیم $z=f(x,y)$ دیفرانسیل کامل این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

دیفرانسیل کامل مرتبه اول f : $df=\frac{\partial f}{\partial x}.dx+\frac{\partial f}{\partial y}.dy$

دیفرانسیل کامل مرتبه دوم f : $d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy$

$\vdots \qquad \vdots$

دیفرانسیل کامل مرتبه n ام f. : $d^nf=\left(\frac{\partial}{\partial x}.dx+\frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^n.f$

نکته: شرط لازم برای آنکه عبارت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ یک دیفرانسیل کامل باشد (یعنی بتوان $u(x,y)$ را پیدا کرد که $du=Pdx+Qdy$ باشد) آن است که $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید $f(x,y)=\left(x^2+1\right)^{y^2}$، مطلوب است محاسبه دیفرانسیل کامل $f(x,y)$ ؟

حل:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\longrightarrow df=y^2(2x)\left(x^2+1\right)^{y^2-1}dx+2y.Ln\left(x^2+1\right).\left(x^2+1\right)^{y^2}dy$$

مثال ۲: مقدار a را طوری تعیین کنید که عبارت $\left(ax^2y^2-\cos y\right)dx+\left(x\sin y+y^3+2x^3y\right)dy$ دیفرانسیل کامل باشد؟

حل: با توجه به نکته فوق باید $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. لذا خواهیم داشت:

$$2ax^2y+\sin y=\sin y+0+6x^2y\longrightarrow 2a=6\longrightarrow a=3$$

مثال ۳: اگر $z=x^2y+xy^2+3$ باشد حاصل d^2z در نقطه $(2,-2)$ کدام است؟

حل:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy$$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x+2y\end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy \Rightarrow d^2z=(2y)dx^2+(2x)dy^2+2(2x+2y)dxdy$$

$$d^2z\big|_{(2,-2)}=-4dx^2+4dy^2$$

مثال۴: دیفرانسیل کامل توابع زیر را بدست آورید؟

$$1)\ u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$$

حل:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \Rightarrow$$

$$du=\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)z.\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\right]dx+\left[\left(x-\frac{x}{y^2}\right)z.\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\right]dy+\left[\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z.\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)\right]dz$$

$$2)\ z=yx^y$$

حل:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \Rightarrow dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$$

$$3)\ u=\operatorname{Arc\,tg}\frac{xy}{z^2}$$

حل:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \Rightarrow du=\frac{z^2y}{x^2y^2+z^4}dx+\frac{z^2x}{x^2y^2+z^4}dy-\frac{2xyz}{x^2y^2+z^4}dz$$

۳) اپراتور برداری نابلا و بحث‌های مربوطه:

اپراتور برداری نابلا در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

در ارتباط با این اپراتور بحث‌های زیر مطرح می‌شود:

۳-۱) گرادیان یک تابع اسکالر:

گرادیان تابع اسکالری مانند $w=f(x,y,z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\text{grad}\,w=\vec{\nabla}w=\frac{\partial w}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial w}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}}$$

توجه مهم: اگر معادله یک سطح فضایی (رویه) به صورت $F(x,y,z)=0$ باشد می‌توان نشان داد بردار حاصله از $\text{grad}\,F$ در هر نقطه از سطح مورد نظر بر سطح مذکور عمود است و از این موضوع دو استفاده زیر به عمل می‌آید:

الف) نوشتن معادله صفحه مماس و خط عمود بر رویه با معادله $F(x,y,z)=0$ در هر نقطه از آن.

ب) نوشتن معادله خط مماس و صفحه عمود بر یک منحنی با معادله $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ درهر نقطه آن (فصل مشترک دو رویه).

مسائل حل شده:

مثال ۱: در مسائل زیر $\vec{\nabla}f$ را در نقطه مفروض بیابید؟

1) $f(x,y,z)=\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}\quad,\quad(3,4,0)$

حل:

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}.+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\longrightarrow\vec{\nabla}f=\frac{x}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}+o\hat{k}\longrightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(3,4,0)}=\frac{3}{25}\hat{i}+\frac{4}{25}\hat{j}$$

2) $f(x,y,z)=\cos x.\cos y.\cosh z\ ,\ \left(0\,,\frac{\pi}{4}\,,0\right)$

حل:

$$\vec{\nabla}f=(-\sin x.\cos y.\cosh z)\hat{i}+(-\cos x.\sin y.\cosh z)\hat{j}+(\cos x.\cos y.\sin h\, z)\hat{k}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{\nabla}f\Big|_{\left(0,\frac{\pi}{4},0\right)}=0\hat{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}+0\hat{k}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}f=-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

مثال ۲: معادله رویه ای به صورت $e^{x^2-y}+z^3-2=0$، توصیف شده است معادلات صفحه مماس و خط عمود بر این رویه را در نقطه‌ای با مختصات $(1,1,1)$ به‌دست آورید؟

حل: ابتدا گرادیان رویه فوق (بردار نرمال) را بدست می‌آوریم:

$$f(x,y,z)=e^{x^2-y}+z^3-2\longrightarrow\vec{\nabla}f=2xe^{x^2-y}\hat{i}-e^{x^2-y}\hat{j}+3z^2\hat{k}\longrightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,1,1)}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

پس بردار فوق بردار نرمال صفحه مماس و نیز بردار هادی خط عمود بر رویه است.

معادله صفحه مماس: $2(x-1)-1(y-1)+3(z-1)=0\longrightarrow 2x-y+3z=4$

معادله خط عمود: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{3}\longrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{1-y}{1}=\frac{z-1}{3}$

مثال ۳: معادله یک منحنی از طریق فصل مشترک دو رویه $C:\begin{cases}x^2-yz=3\\xz+y^2=3\end{cases}$ توصیف شده است. در نقطه‌ای از این منحنی با مختصات $(2,1,1)$ خطی مماس و صفحه‌ای عمود ترسیم کرده‌ایم معادله آن‌ها را بنویسید؟

حل: ابتدا گردایان دو رویه فوق را بدست آورده و سپس ضرب خارجی این دو بردار نرمال را بدست می‌آوریم.

$$F(x,y,z)=x^2-yz-3\longrightarrow\vec{\nabla}F=2x\hat{i}-z\hat{j}-y\hat{k}\longrightarrow\vec{N}_1=\vec{\nabla}F\Big|_{(2,1,1)}=4\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$$

$$G(x,y,z)=xz+y^2-3\longrightarrow\vec{\nabla}G=z\hat{i}+2y\hat{j}+x\hat{k}\longrightarrow\vec{N}_2=\vec{\nabla}G\Big|_{(2,1,1)}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

بدیهی است که از ضرب خارجی این دو بردار، برداری عمود بر هر دو بردار حاصل می‌شود، که بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه عمود است. لذا خواهیم داشت:

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9\hat{j} + 9\hat{k}$$

معادله صفحه عمود : $0(x-2) - 9(y-1) + 9(z-1) = 0 \longrightarrow -y + z = 0 \longrightarrow y = z$

معادله خط مماس : $\begin{cases} \dfrac{y-1}{-9} = \dfrac{z-1}{9} \\ x = 2 \end{cases}$

۲ـ۳) دیورژانس و کرل یک تابع برداری:

تابع برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{f}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

دیورژانس و کرل این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{curl}\vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

مثال: دیورژانس و کرل تابع برداری $\vec{f} = x^2\vec{i} + (z^2 - y)\vec{j} + xy\vec{k}$ را محاسبه کنید؟

حل:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 - y)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 2x - 1 + 0$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = 2x - 1$$

$$\operatorname{curl}\vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 - y & xy \end{vmatrix} = (x - 2z)\vec{i} - (y - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = (x - 2z)\vec{i} - y\vec{j}$$

مثال: مقدار دیورژانس گرادیان تابع $f = e^{x+y+z}$ را در مبدا بدست آورید؟

حل:

$$\operatorname{grad} f = e^{x+y+z}\vec{i} + e^{x+y+z}\vec{j} + e^{x+y+z}\vec{k}$$

$$\operatorname{div}(\nabla f) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} \xrightarrow{x=y=z=0} \operatorname{div}(\nabla f) = 3$$

۳-۳) لاپلاسین یک تابع اسکالر:

فرض کنید داشته باشیم $w = f(x,y,z)$، لاپلاسین این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta w = \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

مطابق تعریف هرگاه لاپلاسین w، صفر باشد آنگاه می‌گویند w تابعی همساز (هارمونیک) است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: لاپلاسین تابع $w = x^2y + 3xy^4$ را بیابید؟

حل:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2y + 36xy^2$$

مثال ۲: چنانچه داشته باشیم $f(x,y) = ax^3 - xy^2 + by^3$، a و b چگونه باشند تا تابع f همساز باشد؟

حل: طبق تعریف تابع همساز داریم:

$$\nabla^2 w = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow 6ax + (-2x + 6by) = 0 \longrightarrow (6a-2)x + 6by = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

۳-۴) مشتق سویی (جهتی):

برای پیدا کردن مشتق سویی تابع $w = f(x,y,z)$، درجهتی مانند $\vec{P}$ می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$\frac{dw}{d\vec{p}} = (\vec{\nabla} w).(\vec{\lambda}_{\vec{P}})$: مشتق سویی تابع w درجهت $\vec{P}$
$\vec{\lambda}_{\vec{P}} = \frac{\vec{P}}{\lvert\vec{P}\rvert}$: بردار یکه درجهت $\vec{P}$

نکته: همانطور که دیدیم، برای محاسبه مشتق سویی تابع w در جهت بردار $\vec{P}$ داریم:

$$\frac{dw}{d\vec{P}} = \vec{\nabla} w . \vec{\lambda}_{\vec{P}} = |\vec{\nabla} w| \overbrace{|\vec{\lambda}_{\vec{P}}|}^{1} . \cos\theta = |\vec{\nabla} w| . \cos\theta$$

واضح است که:

۱ـ بیشترین مقدار مشتق سویی تابع w وقتی اتفاق می‌افتد که θ (زاویه بین دو بردار $\vec{\lambda}_{\vec{P}}$، $\vec{\nabla} w$) برابر صفر باشد و البته این بیشترین مقدار برابر است با: $\max = |\vec{\nabla} w|$.

۲ـ وقتی زاویه θ برابر 90° باشد، مشتق سویی مذکور صفر خواهد بود.

نکته: می‌دانیم اصولاً مشتق دریک نقطه تغییرات لحظه ای کمیت را در آن نقطه نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، مشتق سویی تابع $w=f(x,y,z)$ در نقطه‌ای مانند A و در جهتی مانند $\vec{P}$ بیانگر سرعت تغییرات کمیت w است وقتی که در نقطه A ایستاده و در جهت $\vec{P}$ حرکت می‌کنیم. به تعبیری وقتی می‌گوییم مشتق سویی تابع w در نقطه A در جهتی مانند u_1 نسبت به جهتی مانند u_2 بیشتر است، یعنی آنکه سرعت تغییرات w وقتی در نقطه A ایستاده‌ایم و در جهت u_1 حرکت می‌کنیم بیشتر از مقدار مذکور برای جهت u_2 است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مشتق سویی تابع $z=\text{Ln}\left(x^2+y\right)$ در نقطه $(2,1)$ و در جهتی که نقطه $(2,1)$ را به نقطه $(4,5)$ وصل می‌کند، چقدر است؟

حل:

$$\vec{\nabla}z=\frac{\partial z}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}z=\frac{2x}{x^2+y}\hat{i}+\frac{1}{x^2+y}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}z\Big|_{(2,1)}=\frac{4}{5}\hat{i}+\frac{1}{5}\hat{j}$$

$(\vec{P})$ جهت مورد نظر : $\vec{P}=(4-2)\hat{i}+(5-1)\hat{j}\longrightarrow\vec{P}=2\hat{i}+4\hat{j}$

$\vec{P}$ بردایکه : $\vec{\lambda}_{\vec{P}}=\dfrac{2\hat{i}+4\hat{j}}{\sqrt{4+16}}\longrightarrow\vec{\lambda}_{\vec{P}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\hat{i}+2\hat{j}\right)$

پس مشتق سویی عبارت است از:

$$\frac{dz}{d\vec{P}}=\vec{\nabla}z.\vec{\lambda}_{\vec{P}}=\left(\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)=\frac{6\sqrt{5}}{25}$$

مثال ۲: مشتق تابع $z=\text{Ln}\left(x^2+y^2\right)$ در نقطه $P(3,4)$ در امتداد گرادیان تابع در این نقطه برابر کدام است؟

حل:

$$\vec{\nabla}z=\frac{\partial z}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}z=\frac{2x}{x^2+y^2}\hat{i}.+\frac{2y}{x^2+y^2}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}z\Big|_{(3,4)}=\frac{6}{25}\hat{i}+\frac{8}{25}\hat{j}$$

$\vec{\nabla}z$ بردار یکه در جهت : $\dfrac{\frac{6}{25}\hat{i}+\frac{8}{25}\hat{j}}{\sqrt{\frac{36}{625}+\frac{64}{625}}}=\dfrac{3}{5}\hat{i}+\dfrac{4}{5}\hat{j}$

پس مشتق سویی مورد نظر عبارت است از:

$$\mathbf{I}=\left(\frac{6}{25}\hat{i}+\frac{8}{25}\hat{j}\right).\left(\frac{3}{5}\hat{i}+\frac{4}{5}\hat{j}\right)=\frac{2}{5}$$

نکته بسیار مهم: مشتق سویی یک تابع درامتداد بردار گرادیان آن تابع، برابر اندازه گرادیان تابع می‌باشد.

در مثال فوق می‌توان از این نکته استفاده کرد لذا داریم:

$$\mathbf{I}=\left|\frac{6}{25}\hat{i}+\frac{8}{25}\hat{j}\right|=\frac{1}{25}.\sqrt{36+64}=\frac{2}{5}$$

مثال ۳: درچه جهتی مشتق سویی $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در $(1,1)$ برابر صفر است؟

حل:

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}f=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\hat{i}-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\hat{j}\longrightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,1)}=\hat{i}-\hat{j}$$

چنانچه مقدار این مشتق سویی در جهت $\vec{\lambda}=\cos\alpha\hat{i}+\sin\alpha\hat{j}$ صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$\vec{\nabla}F.\vec{\lambda}=0\longrightarrow(i-j).(\cos\alpha i+\sin\alpha j)=0\longrightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=0\longrightarrow\tan\alpha=1\longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

لذا جهت مورد نظر نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال ۴: مشتق $f(x,y)$ در $P_0(1,2)$ در جهت بردار $\hat{i}+\hat{j}$ برابر است با $2\sqrt{2}$ و در جهت بردار $-2j$ برابر است با -3، مشتق f در جهت $-\hat{i}-2\hat{j}$ چقدر است؟

حل:

$$\begin{cases}\hat{i}+\hat{j}\ \text{برداریکه در جهت}:\vec{\lambda}_{u_1}=\dfrac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{1+1}}\longrightarrow\vec{\lambda}_{u_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\\ \vec{u}_1\ \text{مشتق سویی درجهت}:\vec{\nabla}f.\vec{\lambda}_{u_1}=2\sqrt{2}\longrightarrow(f_x\hat{i}+f_y\hat{j}).\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)=2\sqrt{2}\longrightarrow f_x+f_y=4\end{cases}\quad(1)$$

$$\begin{cases}-2\hat{j}\ \text{برداریکه در جهت}:\vec{\lambda}_{u_2}=\dfrac{-2\hat{j}}{\sqrt{4}}=-\hat{j}\\ \vec{u}_2\ \text{مشتق سویی درجهت}:\vec{\nabla}f.\vec{\lambda}_{u_2}=-3\longrightarrow(f_x\hat{i}+f_y\hat{j}).(-\hat{j})=-3\longrightarrow f_y=3\end{cases}\quad(2)$$

$$(1),(2)\longrightarrow f_x=1;\ f_y=3\longrightarrow\vec{\nabla}f=\hat{i}+3\hat{j}$$

حال با داشتن گرادیان تابع، مقدار مشتق سویی را در جهت $-\hat{i}-2\hat{j}$ بدست می‌آوریم:

$$P=-\hat{i}-2\hat{j}$$

$$\vec{\lambda}_{\vec{P}}=\frac{-\hat{i}-2\hat{j}}{\sqrt{1+4}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}\hat{i}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\hat{j}$$

پس مقدار مشتق سویی عبارت است:

$$\vec{\nabla}f.\vec{\lambda}_{\vec{P}}=(\hat{i}+3\hat{j}).\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\hat{i}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\hat{j}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{-7\sqrt{5}}{5}$$

۴) مسائل اکسترمم توابع دومتغیره:

۴-۱) اکسترمم‌های نسبی توابع دومتغیره:

تابع دومتغیره $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید می‌گوییم این تابع در (x_0,y_0) دارای نقطه بحرانی است هرگاه مقادیر $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ تواماً صفر یا بی نهایت باشد.

قضیه: فرض کنید مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ برای تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) همزمان صفر شده باشد برای تعیین نوع نقطه بحرانی باید مقادیر زیر را حساب کنیم:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$\Delta=B^2-AC$$

پس از محاسبه مقادیر فوق خواهیم داشت:

۱ـ اگر $\Delta<0$ و $A>0$ باشد تابع در (x_0,y_0) دارای min نسبی است.
۲ـ اگر $\Delta<0$ و $A<0$ باشد تابع (x_0,y_0) دارای max نسبی است.
۳ـ اگر $\Delta>0$ باشد تابع z در (x_0,y_0) دارای max و min نسبی نمی‌باشد و اصطلاحاً دارای نقطه زینی است.
۴ـ اگر $\Delta=0$ باشد این روش بی نتیجه است.

تعریف نقطه زینی: نقطه زینی، نقطه‌ای بحرانی است که دارای max و min نسبی نیست.

توجه: فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه بحرانی باشد ولی قضیه گفته شده برای تعیین نوع این نقطه بحرانی مناسب نباشد. در این حالت عبارت زیرا را که Δy و Δx به صفر می‌گرایند، تشکیل می‌دهیم:

$$J=f(x_0+\Delta x\ ,\ y_0+\Delta y)-f(x_0\ ,\ y_0)$$

سپس حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx داشته باشیم $J>0$ تابع در (x_0,y_0) دارای min نسبی است.

چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx داشته باشیم $J<0$ تابع در (x_0,y_0) دارای max نسبی است.

چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx، J علامت یکسانی نداشته باشد، تابع در (x_0,y_0) دارای نقطه زینی است.

توجه: بدیهی است گاهی نوع نقطه بحرانی با نگاه معلوم می‌شود، مثلاً:

تابع $z=x^4+y^4$ در نقطه بحرانی $(0\ ,\ 0)$ دارای min نسبی (و مطلق) است.

تابع $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ در نقطه بحرانی $(0\ ,\ 0)$ دارای max نسبی (و مطلق) است.

تابع $z=x^3y^4$ در نقطه بحرانی $(0\ ,\ 0)$ دارای نقطه زینی است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: تابع $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ مفروض است، نقاط بحرانی و نوع آن‌ها را در این تابع مشخص کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0\longrightarrow x^2=y\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0\longrightarrow y^2=x\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}x=0\longrightarrow y=0\\x=1\longrightarrow y=1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\\[2mm]B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3\\[2mm]C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y\end{array}\right\}\longrightarrow\Delta=B^2-AC=(-3)^2-(6x)(6y)=9-36xy$$

در $(0,0)$ داریم: $\Delta=9>0$ لذا تابع دارای نقطه زینی است.

در $(1,1)$ داریم: $\begin{cases}\Delta:(9-36)<0\\A:6>0\end{cases}$ لذا تابع دارای min نسبی است.

مثال ۲: در تابع $f(x,y)=ax^3+by^2-xy^3+x^2$ مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع مذکور در $(1,-1)$ دارای نقطه بحرانی باشد و نوع این نقطه را نیز مشخص کنید؟

حل:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3ax^2-y^3+2x\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2by-3xy^2\end{cases}$$

اگر $(1,-1)$ بخواهد از نوع نقطه بحرانی برای تابع f باشد باید $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ تواماً صفر باشد.

$$\begin{cases}3a.(1)^2-(-1)^3+2(1)=0\longrightarrow 3a+3=0\longrightarrow a=-1\\2b.(-1)-3.(1)(-1)^2=0\longrightarrow -2b-3=0\longrightarrow b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر a و b در $f(x,y)$ نوع نقطه بحرانی $(1,-1)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x+2\\[2mm]B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3y^2\\[2mm]C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-3-6xy\end{cases}\xrightarrow{x=1\,;\,y=-1}\begin{cases}A=-4\\B=-3\\C=3\end{cases}\longrightarrow\Delta=B^2-AC=9+12=21$$

چون $\Delta=21>0$ است پس نقطه $(1,-1)$ از نوع نقطه زینی است.

مثال ۳: تابع $f(x,y)=\int_y^x (t^2-1)e^{t^2}dt$ در نقطه $P(1,-1)$ چه خصوصیتی دارد؟

حل:

یادآوری:

صورت قاعده لایب‌نیتز:

$$f(x)=\int_{P(x)}^{Q(x)} h(x,t)\,dt$$

$$f'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}=\int_{P(x)}^{Q(x)}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}dt+Q'(x).h(x,Q(x))-P'(x).h(x,P(x))$$

پس طبق یادآوری فوق داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=(x^2-1).e^{x^2}\,|_p=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-(y^2-1).e^{y^2}\,|_p=0\end{cases}\longrightarrow$$

بنابراین نقطه $P(1,-1)$ از یک نقطه بحرانی است.

$$\begin{cases}A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2xe^{x^2}+2x(x^2-1)e^{x^2}\\[2mm] B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\\[2mm] C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2ye^{y^2}-2y(y^2-1)e^{y^2}\end{cases}\xrightarrow{P:(1,-1)}\begin{cases}A=2e\\ B=0\\ C=2e\end{cases}\longrightarrow \Delta:B^2-AC=0-4e^2=-4e^2$$

چون $\Delta=(-4e^2)<0$ و نیز $A=2e>0$ است پس نقطه $(1,-1)$ از نوع مینیمم نسبی است.

۲-۴) یافتن مقادیر اکسترمم یک تابع دومتغیره در یک ناحیه از صفحه:

فرض کنید هدف یافتن مقادیر اکسترمم مطلق تابع $z=f(x,y)$ در یک ناحیه معلوم مانند D باشد. برای این منظور نخست نقاط بحرانی تابع z را پیدا کرده و مقادیر z را در نقاط بحرانی واقع در ناحیه D پیدا می‌کنیم، سپس برروی تک تک منحنی‌های مرزی ناحیه D مقادیر اکسترمم z را بدست می‌آوریم در نهایت کمترین و بیشترین مقادیر z بدست آمده را به عنوان جواب نهایی گزارش می‌کنیم.

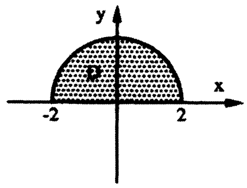
مسائل حل شده:

مثال ۱: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=2x^2+y^2+x$ را در ناحیه $D:\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\ ,\ y\ge 0\}$ مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x+1=0\longrightarrow x=-\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0\longrightarrow y=0\end{cases}$$

ناحیه نشان داده شده در فرض مسئله را رسم می‌کنیم تا مشخص شود که نقطه $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ در درون ناحیه قرار دارد یا خیر؟



پس با توجه به این که $\left(-\frac{1}{4},0\right)\in D$ است می‌نویسیم:

$$f\left(-\frac{1}{4},0\right)=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2+(0)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$$

دو منحنی مرزی برای ناحیه D داریم:

الف) روی منحنی $x^2+y^2=4$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=4+x^2+x\Rightarrow f'=2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	$+2$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-2)=4+(-2)^2+(-2)=6$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{15}{4}$$
$$f(2)=4+4+2=10$$

ب) روی منحنی $y=0$ (محور xها) بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=2x^2+x\Rightarrow f'=4x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

x	-2	$-\frac{1}{4}$	2
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-2)=2(4)+(-2)=6$$
$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$$
$$f(2)=10$$

پس در کل داریم:

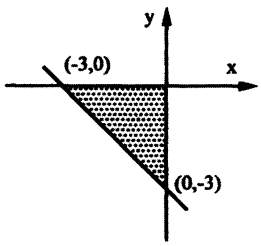
$$f_{min}=-\frac{1}{8}\ ;f_{max}=10$$

مثال ۲: حداکثر و حداقل تابع $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ در حوزه $x+y\ge -3, y\le 0, x\le 0$ را بدست آورید؟

حل:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x+1=0\end{cases}\Rightarrow x=-1\ ;y=-1$$

حوزه معرفی شده در فرض مسئله را رسم می‌کنیم:



بدیهی است نقطه $(-1,-1)$، متعلق به ناحیه نشان داده شده است لذا داریم:

$$f(-1,-1)=(-1)^2+(-1)^2-(-1)(-1)-1-1=-1$$

سه منحنی مرزی برای ناحیه نشان داده شده داریم:

الف) روی منحنی $x=0$ (محور yها) بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=y^2+y\Rightarrow f'=2y+1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ در نقطه :(z حداقل)$_{x=0}=-\frac{1}{4}$

$(0,-3)$ در نقطه :(z حداکثر)$_{x=0}=6$

ب) روی منحنی $y=0$ (محور xها) بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=x^2+x\Rightarrow f'=2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$\left(\frac{-1}{2},0\right)$ در نقطه :(f حداقل)$_{y=0}=-\frac{1}{4}$

$(-3,0)$ در نقطه :(f حداکثر)$_{y=0}=6$

ج) روی منحنی $x+y=-3$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=3x^2+9x+6\Rightarrow f'=6x+9=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\ ;\ y=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

$\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ در نقطه :(f حداقل)$_{x+y=-3}=-\frac{3}{4}$

پس در کل داریم:

$$f_{min}=-1\ ,\ f_{max}=6$$

مثال ۳: حداکثر و حداقل تابع $f(x,y)=(x^2-4x)\cos y$ در حوزه $1\le x\le 3\ ;\ -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$ را بدست آورید؟

حل:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=(2x-4)\cos y=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-(x^2-4x)\sin y=0\end{cases}\Rightarrow\quad x=2\ ;\ y=0$$

بدیهی است نقطه $(2,0)$، متعلق به ناحیه نشان داده شده است لذا داریم:

$$f(2,0)=(4-8).\cos 0=-4$$

چهار منحنی مرزی برای ناحیه نشان داده شده داریم:

الف) روی منحنی $x=1$ در فاصله $-\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=-3\cos y\Rightarrow f'=+3\sin y=0\Rightarrow y=0$$

$\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه :(f حداکثر)$_{x=1}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(1,+\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه :$f=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$(1,0)$ در نقطه :(f حداقل)$_{x=1}=-3$

ب) روی منحنی $y=\frac{\pi}{4}$ در فاصله $1\le x\le 3$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=(x^2-4x).\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f'=(2x-4).\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow x=2$$

$\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداکثر f) $_{y=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداکثر f) $_{y=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداقل f) $_{y=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}$

ج) روی منحنی $x=3$ در فاصله $-\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=-3\cos y\Rightarrow f'=+3\sin y=0\Rightarrow y=0$$

$\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداکثر f) $_{x=3}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: $f=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$(3,0)$ در نقطه: (حداقل f) $_{x=3}=-3$

د) روی منحنی $y=-\frac{\pi}{4}$ در فاصله $1\le x\le 3$ بدست می‌آید:

$$f(x,y)\Rightarrow f=(x^2-4x).\frac{+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f'=(2x-4).\frac{+\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow x=2$$

$\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداکثر f) $_{y=-\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداکثر f) $_{y=-\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه: (حداقل f) $_{y=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}$

پس در کل داریم:

$$f_{min}=-3\ \ ;\ \ f_{max}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴-۳) اکسترمم‌های مشروط و قضیه لاگرانژ:

هدف یافتن مقادیر اکسترمم‌های تابع $z=f(x,y)$ با شرط $g(x,y)=0$ می‌باشد. برای این منظور تابع زیر را که به تابع لاگرانژ موسوم است، تشکیل داده و از دستگاه زیر، مقدار λ (به ضریب لاگرانژ موسوم است) و به تبع آن (x,y)هایی که به اکسترمم شدن تابع z با شرط $g(x,y)=0$ منجر می‌شود را پیدا می‌کنیم:

تابع لاگرانژ: $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

دستگاه لاگرانژ: $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=3x-4y$ را با شرط $x^2+y^2=1$، پیدا کنید؟

حل: ابتدا باید تابع لاگرانژ را تشکیل داده و به تبع آن دستگاه لاگرانژ را تشکیل دهیم:

$$L(x,y)=3x-4y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow 3+2\lambda x=0\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2\lambda} & :1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\Rightarrow -4+2\lambda y=0\Rightarrow y=\dfrac{2}{\lambda} & :2 \\ x^2+y^2=1 & :3 \end{cases}$$

با جایگذاری شروط ۱ و ۲ در شرط ۳ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2=1\Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2}=1\Rightarrow \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

$$\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow f=3\left(-\frac{3}{5}\right)-4\left(\frac{4}{5}\right)=-5\Rightarrow f_{min}=-5$$

$$\lambda=-\frac{5}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow f=3\left(\frac{3}{5}\right)-4\left(-\frac{4}{5}\right)=5\Rightarrow f_{max}=5$$

مثال ۲: ماکزیمم و مینیمم تابع $z=x^2+y^2$ را به ازای $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$، به‌دست آورید؟

حل: ابتدا باید تابع لاگرانژ را تشکیل داده و به تبع آن دستگاه لاگرانژ را تشکیل دهیم:

$$L(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow 2x+\dfrac{\lambda}{2}=0\Rightarrow x=-\dfrac{\lambda}{4} & :1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\Rightarrow 2y+\dfrac{\lambda}{3}=0\Rightarrow y=-\dfrac{\lambda}{6} & :2 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 & :3 \end{cases}$$

با جایگذاری شروط ۱ و ۲ در شرط ۳ خواهیم داشت:

$$\frac{-\lambda}{8}-\frac{\lambda}{18}=1\Rightarrow\frac{-9\lambda-4\lambda}{72}=1\Rightarrow\lambda=-\frac{72}{13}$$

$$\lambda=-\frac{72}{13}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{72}{52} \\ y=\dfrac{72}{78}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{36}{13}$$

مثال ۳: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را با شرط $x^2-2x+y^2-4y=0$، بیابید؟

حل: ابتدا باید تابع لاگرانژ را تشکیل داده و به تبع آن دستگاه لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-2x+y^2-4y\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x-2\lambda=0\Rightarrow 2x(1+\lambda)=2\lambda\Rightarrow x=\dfrac{\lambda}{\lambda+1} & :1\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y-4\lambda=0\Rightarrow 2y(1+\lambda)=4\lambda\Rightarrow y=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1} & :2\\ x^2-2x+y^2-4y=0 & :3\end{cases}$$

با جایگذاری شروط ۱ و ۲ در شرط ۳ داریم:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2-\frac{2\lambda}{\lambda+1}+\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^2-\frac{8\lambda}{\lambda+1}=0\Rightarrow\lambda=0;\lambda=-2$$

$$\lambda=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow f_{min}=0$$

$$\lambda=-2\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}\Rightarrow f_{max}=20$$

مثال ۴: یک هواپیما به شکل بیضی‌وار $4x^2+y^2+4z^2=16$ وارد زمین می‌شود و سطح آن شروع به گرم شدن می‌کند. بعد از سه ساعت، دمای نقطه (x,y,z)، بر سطح هواپیما برابر است با $T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$، گرمترین نقطه رویه هواپیما چقدر است؟

حل: ابتدا باید تابع لاگرانژ را تشکیل داده و به تبع آن دستگاه لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600+\lambda\left(4x^2+y^2+4z^2-16\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow 16x+8\lambda x=0\Rightarrow\lambda=-2\ ,x=0 & :1\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\Rightarrow 4z+2\lambda y=0\ \ \rightarrow\ \ y=\dfrac{-2z}{\lambda} & :2\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\Rightarrow 4y-16+8\lambda z=0\ \ \rightarrow\ \ y=4-2\lambda z & :3\\ 4x^2+y^2+4z^2=16 & :4\end{cases}$$

با توجه به شروط بالا و کمی دقت دو حالت خواهیم داشت:

حالت اول: $x=0\ ;\ y=\dfrac{4}{1-\lambda^2}\ ;\ z=\dfrac{-2\lambda}{1-\lambda^2}$

$$g(x,y,z)=0\Rightarrow 0+\frac{16}{(1-\lambda^2)^2}+4\left(\frac{4\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\right)=16\ \Rightarrow\ \lambda=0\Rightarrow\begin{cases}x=z=0\\ y=4\end{cases}\Rightarrow T(x,y,z)=600$$

حالت دوم: $\lambda=-2\xrightarrow{\text{با توجه به شروط ۲ و ۳}}y=-\dfrac{4}{3}\ ;\ z=-\dfrac{4}{3}$

$$g(x,y,z)=0\Rightarrow 4x^2+\frac{16}{9}+4\times\frac{16}{9}-16=0\Rightarrow x=\pm\frac{4}{3}\Rightarrow T(x,y,z)=8\times\frac{16}{9}-\frac{16}{3}\times\frac{-4}{3}-16\times\frac{-4}{3}+600$$

$$\Rightarrow T(x,y,z)=642.67$$

با مقایسه دو T بدست آمده در بالا به این نتیجه می‌رسیم که $T_{max}=642.67$.

مثال ۵: با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مقدار ماکزیمم نسبی $f(x,y,z)=xyz$ را با دو شـرط $x+y+z=4$ و $x-y-z=3$، بیابید؟

حل:

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z-4)+\mu(x-y-z-3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda+\mu=0 & :1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda-\mu=0 & :2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=xy+\lambda-\mu=0 & :3 \\ x+y+z-4=0 & :4 \\ x-y-z-3=0 & :5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{از شرط 4 و 5} \Rightarrow x=\dfrac{7}{2} \\ \text{از شرط 2 و 3} \Rightarrow y=z=\dfrac{2}{7}(\mu-\lambda) \\ \text{با جایگذاری شرط فوق در شرط 4 و با ادغام شرط 1} \Rightarrow y=z=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{max}\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{32}$$

فصل دوم

توابع برداری

۱) مفاهیم اولیه

تعریف بردارهای سرعت و شتاب:

هرگاه ذره‌ای روی منحنی c به معادله $R(t)=f_1(t)\hat{i}+f_2(t)\hat{j}+f_3(t)\hat{k}$ حرکت کند، در هر زمان t خواهیم داشت:

بردار سرعت لحظه‌ای: $\vec{R}'(t)=\vec{v}(t)=f_1'(t)\hat{i}+f_2'(t)\hat{j}+f_3'(t)\hat{k}$

بردار شتاب لحظه‌ای: $\vec{R}''(t)=\vec{v}'(t)=\vec{a}(t)=f_1''(t)\hat{i}+f_2''(t)\hat{j}+f_3''(t)\hat{k}$

مقدار سرعت و مقدار شتاب را می‌توان در هر لحظه از طول بردار سرعت و طول بردار شتاب به دست آورد.

۲) بردار یکانی مماسی، بردار یکانی عمودی اصلی و بردار قائم یکانی دوم:

فرض کنید منحنی c به صورت $\vec{R}(t)$ بیان شده و P نقطه‌ای روی منحنی باشد که به زمان خاص t مربوط می‌شود. در این صورت بردار یکانی مماس بر منحنی c در نقطه p به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'_{(t)}}{\left|\vec{R}'_{(t)}\right|}$$

ملاحظه می‌کنید، بردار سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است، که در مکانیک بیان می‌گردد و در این‌جا به وضوح دیده می‌شود.

بردار یکانی عمودی اصلی یا قائم یکانی اول را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{N}_{(t)}=\frac{\vec{T}'_{(t)}}{\left|\vec{T}'_{(t)}\right|}$$

و نیز قائم یکانی دوم را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

سه تعریف دیگر:

۱ـ صفحه بوسان صفحه‌ای است که از نقطه مفروض p_0 گذشته و نرمال آن بردار قائم یکانی دوم می‌باشد.

۲ـ صفحه قائم صفحه‌ای است که از نقطه مفروض p_0 گذشته و نرمال آن بردار یکانی مماسی می‌باشد.

۳ـ صفحه اصلاحی صفحه‌ای است که از نقطه مفروض p_0 گذشته و نرمال آن بردار قائم یکانی اول می‌باشد.

۳) چند رابطه برای محاسبهٔ انحنا و شعاع انحنای یک منحنی:

الف) برای منحنی $y=f(x)$ که در صفحه تعریف شده است، انحنا در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

ب) برای منحنی قطبی $r=f(\theta)$ که در صفحه تعریف شده است، انحنا در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k(\theta)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

ج) برای منحنی پارامتری $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ که در صفحه تعریف شده است، انحنا در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

د) برای منحنی تعریف شده از طریق بردار موضعی $\vec{R}(t)$ که در فضا توصیف شده است، انحنا در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k(t)=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}}$$

توجه به دو نکته الزامی است:

نکته ۱: توجه کنید عکس انحنا در هر نقطه را شعاع انحنا یا اصطلاحاً شعاع دایره بوسان می‌گویند.

نکته ۲: دقت کنید دایره‌ای که مرکز آن در سمت قسمت مقعر یک منحنی واقع بوده و شعاع آن برابر شعاع انحنا منحنی بوده و یا بر منحنی مورد نظر مماس می‌شود را دایره بوسان منحنی در نقطه مورد نظر می‌گویند. البته به سادگی می‌توان دریافت که مقادیر y ، y' و y''، مربوط به معادله منحنی و دایره مذکور در آن نقطه خاص یکسان می‌باشد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: منحنی‌ای که بردار موضعی هر نقطه از آن به صورت $\vec{R}(t)=e^t\hat{i}-(2t^2+\cos t+t)\hat{j}+(t^2-3t)\hat{k}$ بیان می‌شود، مفروض است انحنای این منحنی را در نقطه $t=0$ پیدا کنید؟

حل:

$$\vec{R}'(t)=e^t\,\hat{i}-(4t-\sin t+1)\hat{j}+(2t-3)\hat{k}$$

$$\vec{R}''(t)=e^t\,\hat{i}-(4-\cos t)\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\begin{matrix}\vec{R}'(0)=\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}\\ \vec{R}''(0)=\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \vec{R}'(0)\times\vec{R}''(0)=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & -3\\1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}(-2-9)-\hat{j}(2+3)+\hat{k}(-3+1)$$

$$k(0)=\frac{\left|-11\hat{i}-5\hat{j}-2\hat{k}\right|}{\left|\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}\right|^3}=\frac{\sqrt{121+25+4}}{\left(\sqrt{1+1+9}\right)^3}=\frac{5}{11}\sqrt{\frac{6}{11}}$$

مثال ۲: منحنی $y=x^2$ را در نظر بگیرید چنانچه دایره‌ای ترسیم کنیم که در نقطه (1 , 1 -) بر این منحنی مماس و مقدار y'' مربوط به منحنی و دایره در آن‌جا یکسان باشد. شعاع دایره را حساب کنید؟

حل: طبیعی است دایره مذکور همان دایره بوسان منحنی در نقطه داده شده است که شعاع آن عکس انحنای منحنی در این نقطه می‌باشد.

$$\begin{cases} y=f(x)=x^2 \\ y'=2x \\ y''=2 \end{cases} \Rightarrow k(x)=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|2|}{\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}}=\frac{2}{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}$$

$$k(-1)=\frac{2}{(1+4)^{3/2}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}\Rightarrow R(-1)=\frac{1}{k(-1)}=+\frac{5\sqrt{5}}{2}>0$$

مثال ۳: معادله یک منحنی به صورت $r(t)=\cos t\,\hat{i}+(2t-1)\hat{j}+\left(t^2-t\right)\hat{k}$، در نقطه $t=0$ مقادیر زیر را بدست آورید؟

الف) مقادیر سرعت و شتاب متحرکی که بر روی این منحنی حرکت می‌کند را بیابید.

ب) معادلات خط مماس و صفحه عمود بر منحنی را بیابید.

ج) انحنا منحنی و شعاع انحناء را حساب کنید.

حل: الف)

$$\vec{V}(t)=\vec{r}'(t)=(-\sin t)\hat{i}+2\hat{j}+(2t-1)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=(-\cos t)\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\vec{V}(0)=\vec{r}'(0)=0\hat{i}+2\hat{j}-1\hat{k}\Rightarrow\left|\vec{V}(0)\right|=\sqrt{5}\quad \text{سرعت}$$

$$\vec{a}(0)=\vec{r}''(0)=-1\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}\Rightarrow\left|\vec{a}(0)\right|=\sqrt{5}\quad \text{شتاب}$$

ب)

$$\text{در لحظهٔ}\ (t=0)\Rightarrow\begin{cases} x=\cos 0=1 \\ y=2(0)-1=-1 \\ z=0 \end{cases};\ \vec{r}'(0)=0\hat{i}+2\hat{j}-1\hat{k}$$

$$\text{معادله خط مماس}\ D:\begin{cases} \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-0}{-1} \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{معادله صفحه عمود}\ C:0(x-1)+2(y+1)+(-1)(z-0)=0$$

$$C:2y+2-z=0\Rightarrow C:2y-z=-2$$

ج)

$$r'(0)\times r''(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(4-0)\hat{i}-(0-1)\hat{j}+(0+2)\hat{k}$$

$$\text{انحناء}:k(0)=\frac{\left|r'(0)\times r''(0)\right|}{\left|r'(0)\right|^3}=\frac{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}{\left(\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}\right)^3}=\frac{\sqrt{21}}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{شعاع انحناء}:r(0)=\frac{1}{k(0)}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$$

۴) طول قوس منحنی:

هرگاه منحنی c به صورت تابعی از زمان به فرم $\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ ، تعریف شده باشد و x' ، y' و z' در فاصله زمانی $[t_1,t_2]$ پیوسته باشند، می‌توان طول قوس منحنی c را وقتی t از t_1 تا t_2 تغییر می‌کند، از رابطه زیر بدست آورد:

$$\boxed{L=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{R}'(t)\right|dt}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: اگر $\vec{T}$ برداریکانی مماس بر منحنی محدود c باشد، آنگاه $\int_c \vec{T}.\vec{dR}$ معرف چیست؟

حل: با توجه به آن که $d\vec{R}=\vec{R}'(t)dt$ و $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}$ می‌توان نوشت:

$$I=\int_c \vec{T}.d\vec{R}=\int_c \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}\vec{R}'(t)dt$$

اما می‌دانیم $\vec{R}'(t).\vec{R}'(t)=\left|\vec{R}'(t)\right|^2$ لذا:

$$I=\int_c\left|\vec{R}'(t)\right|dt$$

انتگرال فوق طول منحنی c را توصیف می‌کند.

مثال ۲: اگر $\vec{F}(x,y)=y\hat{i}+4x\hat{j}$ و $\vec{T}(s)$ بردار مماس واحد در نقطه دلخواه P بر دایره C به معادله $x^2+y^2=1$ باشد، حاصل $\oint_c \vec{F}.\vec{T}ds$ معرف چیست؟

حل: با نوشتن معادله دایره C به صورت پارامتری داریم:

$$C:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\quad \vec{R}(\theta)=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$

و با توجه به رابطه بردار یکانی مماس داریم:

$$\vec{T}=\frac{\vec{R}'(\theta)}{\left|\vec{R}'(\theta)\right|}=\frac{-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}}{\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}}=-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}$$

حال با توجه به تغییر متغیر قطبی صورت گرفته، داریم:

$$\vec{F}=\sin\theta\hat{i}+4\cos\theta\hat{j}$$

و بدیهی است که ds، المان طول قوس مربوط به دایره C به صورت $ds=Rd\theta=1d\theta$ قابل بیان است.

$$\Rightarrow I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\sin\theta\hat{i}+4\cos\theta\hat{j}\right).\left(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2\theta+4\cos^2\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2\theta-\cos^2\theta+5\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-1+5\cos^2\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-1+5\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\left(-\theta+\frac{5}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi$$

فصل سوم

انتگرال‌های دوگانه

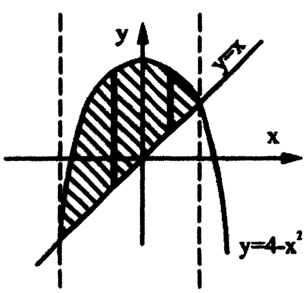
۱) تعریف یک میدان منظم و نامنظم:

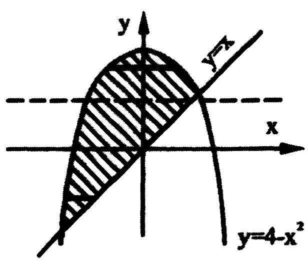
تعریف ۱: ناحیه D که در صفحه $x-y$ تعریف شده است را نسبت به محور xها منظم می‌گویند هر گاه، هر خط موازی محور x ها که از محل تلاقی منحنی‌های محصور کننده میدان رسم می‌شود از داخل میدان نگذرد.

تعریف ۲: فرض کنید D یک ناحیه توصیف شده در صفحه x-y باشد می‌گوییم این ناحیه نسبت به محور x ها منظم است هرگاه، هر اِلمان مستطیلی شکل با عرض dy که به موازات محور x ها در داخل این ناحیه ترسیم می‌شود و به موازات محور y ها جابجا می‌کنیم تا سطح ناحیه D را جارو کند و دارای این ویژگی باشد که سر ابتدایی آن المان همیشه روی یک منحنی و ته انتهایی آن همیشه روی یک منحنی جابجا شود.

مسائل حل شده:

مثال ۱: ناحیه D از طریق منحنی‌های $y=x$ و $y=4-x^2$ محصور شده است وضعیت منظم بودن این ناحیه را نسبت بـه محورهـای مختصات ارزیابی کنید.





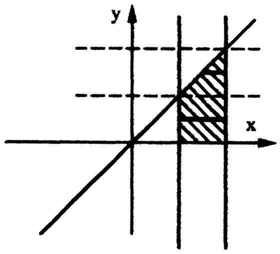
حل: با توجه به دو شکل فوق و با استفاده از تعریف ۱ اگر خطی از محل تلاقی دو منحنی به موازات محور xها رسم کنیم ملاحظه می‌شود که این خط از داخل ناحیه محصور شده می‌گذرد ولی چنانچه از محل تلاقی دو منحنی خطی به موازات محور y ها رسم شود ملاحظه می‌شود که خط از داخل منحنی نمی‌گذرد پس با توجه به مطالب گفته شده می‌توان این نتیجه را گرفت که ناحیه محصور شده نسبت به محور x ها نامنظم و نسبت به محورy ها منظم است.

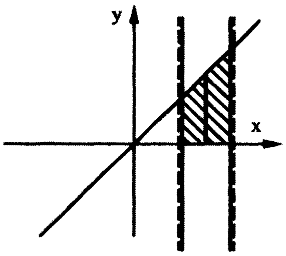
اگر بخواهیم از تعریف ۲ برای منظم یا نامنظم بودن ناحیه فوق استفاده کنیم، باید نوار باریکی به موازات هر کدام از محورها ترسیم کنیم و وضعیت منظم یا نامنظم بودن را بررسی کنیم.

اگر نوار باریکی به موازات محور x رسم کنیم ملاحظه می‌شود که در یک جا دو سر این نوار باریک روی یک منحنی است و این خلاف تعریف ۲ است پس ناحیه فوق نسبت به محور xها نامنظم است.

اگر نوار باریکی به موازات محور yها رسم کنیم ملاحظه می‌شود که همواره یک سر نوار روی منحنی $y=4-x^2$ و سر دیگر آن روی منحنی $y=x$ است پس ناحیه فوق نسبت به محور yها منظم است.

مثال ۲: ناحیه D به صورت $D:\{(x,y)|0\le y\le x\ ;\ 1\le x\le 2\}$ تعریف شده است. وضعیت منظم یا نامنظم ناحیه فوق را بررسی کنید؟





حل:

اگر بخواهیم از تعریف ۱ برای منظم یا نامنظم بودن ناحیه فوق استفاده کنیم، باید از محل‌های تقاطع دو خط $x=1$ و $x=2$ با منحنی $y=x$ که دو نقطه است، دو خط به موازات محور x و دو خط نیز به موازات محور y رسم کنیم که اگر این کار را انجام بدهیم ملاحظه می‌شود که یکی از دو خط موازی محور x از داخل ناحیه محصور شده می‌گذرد در صورتی‌که دو خط موازی محور yها از داخل ناحیه محصور شده نمی‌گذرد پس بنا به تعریف ۱، ناحیه فوق نسبت به محور x نامنظم و نسبت به محور y منظم است. حال اگر بخواهیم از تعریف ۲ برای منظم یا نامنظم بودن ناحیه فوق استفاده کنیم، کافی است در جهت x نوار باریکی به عرض dy و به موازات محور x رسم کنیم که با کمی دقت ملاحظه می‌شود که در یک جا، یک سر نوار روی خط $x=2$ و سر دیگرش روی منحنی $y=x$ است و در جای دیگر یک سر نوار روی خط $x=2$ است و سر دیگرش روی خط $x=1$ است، که با توجه به تعریف ۲ می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که ناحیه فوق نسبت به محور x نامنظم است. اگر بخواهیم وضعیت ناحیه فوق را نسبت به محور y ها بررسی کنیم ملاحظه می‌شود که همواره یک سر نوار روی منحنی $y=x$ حرکت می‌کند و سر دیگر نوار روی خط $x=0$ حرکت می‌کند پس با توجه به تعریف ۲ می‌توان نتیجه گرفت ناحیه فوق نسبت به محور yها منظم است.

۲) انواع مسائل انتگرال‌های دوگانه:

۲-۱) محاسبه یک انتگرال دوگانه وقتی حدود انتگرال در آن داده شده‌اند:

انتگرال‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\int_{x=a}^{b}\int_{y=P(x)}^{Q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$
$$B=\int_{y=c}^{d}\int_{x=m(y)}^{n(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

معمولاً برای محاسبه این انتگرال‌ها کار ساده‌ای در پیش داریم مثلاً در محاسبه انتگرال A، کافی است تابع اولیه $f(x,y)$ را نسبت به متغیر y و با فرض ثابت بودن x محاسبه کنیم سپس در این تابع اولیه حدود مربوط به y را قرار داده و به این ترتیب مسئله تبدیل به یک انتگرال یگانه معمولی برای x می‌شود که به محاسبه آن می‌پردازیم.

مسائل حل شده:

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$I_1=\int_1^2\int_0^y \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$$

حل:

$$I_1=\int_1^2 dy\int_0^y \frac{dx}{(x+y)^3}=\int_1^2 dy.\left[-\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+y)^2}\right]\Bigg|_0^y=\int_1^2\frac{3}{8y^2}dy=\frac{3}{8}\left[-\frac{1}{y}\right]\Bigg|_1^2=\frac{3}{16}$$

$$I_2=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.e^{\sin x-2y}\,dx\,dy$$

حل:

$$I_2=\int_0^1 e^{-2y}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.e^{\sin x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_0^1.e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\left(e^{-2}-1\right)(e-1)$$

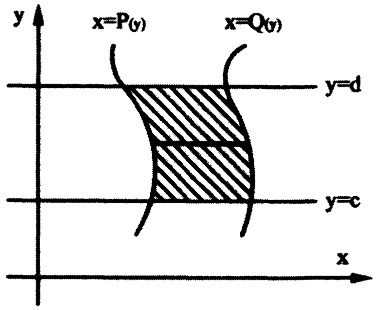
$$I_3=\int_0^1\int_0^y\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$$

حل:

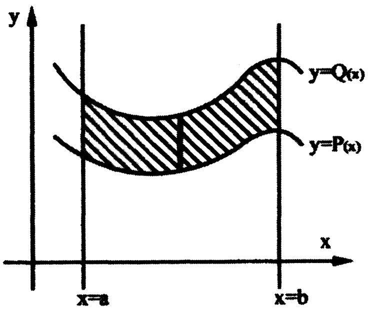
$$I_3=\int_0^1 dy\int_{x=0}^{y}\frac{dx}{x^2+y^2}=\int_0^1 dy.\left[\frac{1}{y}\text{Arc}\tan\frac{x}{y}\right]\Bigg|_0^y=\int_0^1 dy.\frac{1}{y}[\text{Arc}\tan 1]=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{y}dy=\frac{\pi}{4}\text{Ln}y\Big|_0^1=0-(-\infty)=\infty$$

۲-۲) نوشتن حدود انتگرال با معلوم بودن میدان انتگرال‌گیری:

فرض کنید هدف محاسبه انتگرال دوگانه‌ای مانند $I=\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ است که در آن D یک ناحیه مشخص در صفحه می‌باشد. برای قرار دادن حدود انتگرال به طور مقتضی با توجه به وضعیت تعریف ناحیه D یکی از دو شکل زیر می‌تواند مفید باشد.



$$I=\int_{y=c}^{d}\int_{x=P(y)}^{Q(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



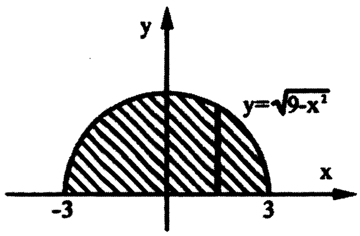
$$I=\int_{x=a}^{b}\int_{y=P(x)}^{Q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

توجه به یک نکته مهم است، چنانچه محاسبه تابع اولیه $f(x,y)$ نسبت به هر دو متغیر (x,y) انتگرال انجام پذیر باشد، معمولاً ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیری در اولویت قرار دهیم که میدان D نسبت به آن متغیر منظم باشد.

مسائل حل شده:

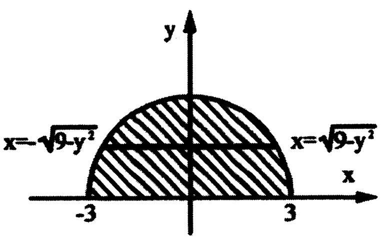
مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I=\int\int_D y\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محدود شده به محور xها و نیم‌دایره $y=\sqrt{9-x^2}$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$I=\int_{-3}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx=\int_{-3}^{3} dx.\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}(9-x^2)\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^3(9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=27-9=18$$

اگر می‌خواستیم ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیر x در اولویت قرار دهیم داریم:



$$I=\int_{y=0}^{3}\int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} y\,dx\,dy=\int_{y=0}^{3} y\,dy.x\Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}=\int_{y=0}^{3} 2y.\sqrt{9-y^2}\,dy=0-\left(-\frac{2}{3}\times 9\times 3\right)=2\times 9=18$$

یادآوری:

$$\int y.\sqrt{9-y^2}\,dy=\int y.t.\left(\frac{-t}{y}dt\right)=\int -t^2dt=-\frac{t^3}{3}=-\frac{1}{3}(9-y^2)\sqrt{9-y^2}$$

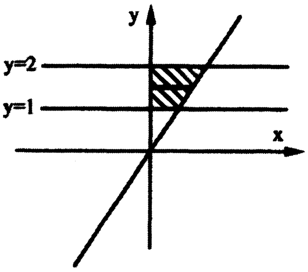
$$\sqrt{9-y^2}=t\Rightarrow\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}dy=dt\Rightarrow dy=\frac{-t}{y}dt$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D \frac{dy\,dx}{x^2-y^2}$ که در آن D به صورت زیر تعریف شده است.

$$D:\{(x,y)\,|\,y\geq 2x;x\geq 0;1\leq y\leq 2\}$$

حل:

ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



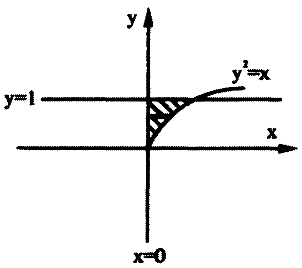
از آنجا که میدان D نسبت به متغیر y نامنظم و نسبت به متغیر x منظم است. ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیر x را در اولویت قرار داده و می‌نویسیم:

$$I=\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{\frac{y}{2}}\frac{dx\,dy}{x^2-y^2}=\int_1^2 dy.\frac{1}{2y}\text{Ln}\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}}=\int_1^2\frac{dy}{2y}\left\{\text{Ln}\left|\frac{\frac{-y}{2}}{\frac{3y}{2}}\right|-\text{Ln}\left|\frac{-y}{y}\right|\right\}$$

$$=\int_1^2\frac{dy}{2y}\left(\text{Ln}\left(\frac{1}{3}\right)-\text{Ln}(1)\right)=\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{1}{3}\right).\text{Lny}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\text{Ln}\frac{1}{3}\right).(\text{Ln}\,2)$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محدود به سهمی $y^2=x$ و خطوط $y=1,x=0$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم.



بدیهی است ناحیه فوق هم نسبت به متغیر x و هم نسبت به متغیر y منظم است ولی امکان محاسبه تابع اولیه $e^{\frac{x}{y}}$ فقط نسبت به متغیر x وجود دارد، لذا می‌نویسیم:

$$I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{1}dy.\left[\left. y\,e^{\frac{x}{y}}\right]\right|_0^{y^2}=\int_{y=0}^{1}\left(ye^y-y\right)dy=ye^y-e^y-\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D x\ln y\,dA$ که در آن D ناحیه محدود به خطوط $x=2$، $y=1$ و منحنی $xy=1$ می‌باشد.

راه حل اول:

$$I=\int_{x=1}^{2}\int_{y=\frac{1}{x}}^{1}x\ln y\,dy\,dx=\int_{x=1}^{2}x\,dx\int_{y=\frac{1}{x}}^{1}\ln y\,dy=\int_{x=1}^{2}x.[y\ln y-y]_{\frac{1}{x}}^{1}dx=\int_{x=1}^{2}x\left[-1-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right]dx=$$

$$\int_{x=1}^{2}(-x+\ln x+1)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\ln x-x+x\right]_1^2=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\ln x\right]_1^2=(-2+2\ln 2)-\left(-\frac{1}{2}+\ln 1\right)=2\ln 2-\frac{3}{2}$$

راه حل دوم:

$$I=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=\frac{1}{y}}^{2}x\ln y\,dx\,dy=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\ln y.\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{y}}^{2}dy=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\left(2\ln y-\frac{1}{2y^2}\ln y\right).dy=\left[2y\ln y-2y+\frac{1}{2y}\ln y+\frac{1}{2y}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-2+\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+1-\ln\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}-2(\ln 1-\ln 2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$$

۲-۳) تغییر در ترتیب انتگرال‌گیری:

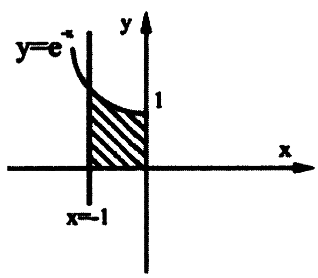
برخی مواقع یک انتگرال دوگانه داده می‌شود که در آن حدود انتگرال نوشته شده است و به هر دلیلی مایلیم ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به حالت مطرح شده تغییر دهیم، در این گونه مواقع کافی است با توجه به حدود نوشته شده در فرض مسئله، میدان انتگرال‌گیری را ترسیم کرده و با توجه به این میدان، حدود انتگرال را به طور مقتضی بنویسیم.

مسائل حل شده:

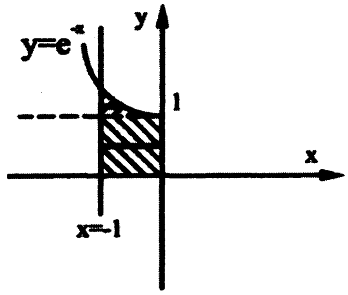
مثال ۱: انتگرال دوگانه زیر را در نظر بگیرید $I=\int_{x=-1}^{0}\int_{y=0}^{e^{-x}}f(x,y)\,dy\,dx$ در این مسئله ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

حل: نخست میدان انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:

$$D:\begin{cases}x=-1\\x=0\\y=0\\y=e^{-x}\end{cases}$$



بدیهی است که ناحیه فوق نسبت به متغیر x نامنظم است. بنابراین با شکستن این ناحیه به چند قسمت کوچکتر که هر کدام نسبت به محور x منظم می‌باشد می‌نویسیم.

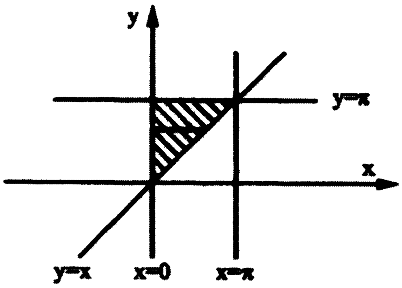


پس انتگرال فوق به انتگرال زیر تبدیل می‌شود.

$$I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=-1}^{0} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{y=1}^{e}\int_{x=-1}^{-\operatorname{Ln} y} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.

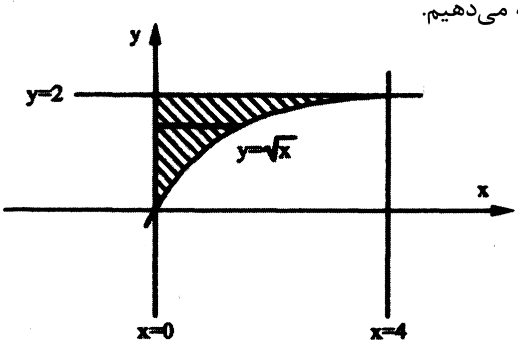
حل: ملاحظه می‌شود حدود انتگرال‌ها به گونه‌ای نوشته شده که ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیر y در اولویت قرار می‌دهد. البته ما می‌دانیم محاسبه تابع اولیه $\frac{\sin y}{y}$ امکان پذیر نیست بنابراین با توجه به حدود نوشته شده میدان انتگرال‌گیری را رسم کرده و حدود را تعویض می‌کنیم.



$$I=\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{y}\frac{\sin y}{y}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,.x\Big|_0^{y}$$
$$=\int_{y=0}^{\pi}\sin y\,dy=-\cos y\Big|_0^{\pi}=2$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int_0^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin y^3\,dy\,dx$.

حل: بدیهی است محاسبه تابع اولیه $\sin y^3$ نسبت به y امکان پذیر نمی‌باشد لذا با توجه به حدود انتگرال، میدان انتگرال‌گیری را رسم کرده و در ادامه ترتیب انتگرال‌گیری را نیز عوض کرده ومسئله را ادامه می‌دهیم.



$$I=\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{y^2}\sin y^3\,dx\,dy=\int_{y=0}^{2}\sin y^3\,dy\,.x\Big|_0^{y^2}$$
$$=\int_{y=0}^{2}y^2\sin y^3\,dy=-\frac{1}{3}\cos y^3\Big|_0^{2}=-\frac{1}{3}(\cos 8-1)$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به خطوط $x=1$، $y=0$ و سهمی $y=x^2$ است.

حل: بدیهی است محاسبه تابع اولیه $e^{\frac{y}{x}}$ نسبت به x غیرممکن است. لذا با توجه به ناحیه D میدان انتگرال‌گیری را عوض کرده و در ادامه ترتیب انتگرال‌گیری را نیز عوض کرده و مسئله را ادامه می‌دهیم.

$$I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dydx=\int_{x=0}^{1}\left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2}dx=\int_{x=0}^{1}(xe^x-x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار انتگرال } \int xe^x dx \text{ ، از روش جزء به جزء بدست می‌آید.}} I=\left[xe^x-e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

۲-۴) محاسبه انتگرال‌های دوگانه وقتی تابع زیر علامت انتگرال در کل ناحیه انتگرال‌گیری طبیعت منحصر به فردی ندارد.

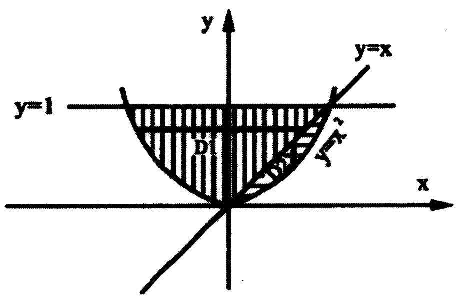
قاعده کلی: برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها به طریقی مناسب ناحیه انتگرال‌گیری را به زیر نواحی کوچکتر به گونه‌ای تقسیم کنیم که در هر کدام از آن زیر نواحی بتوان تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را تعیین کرد و سپس حل مسئله را ادامه می‌دهیم.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور شده به سهمی $y=x^2$ و خط $y=1$ است و $f(x,y)=\begin{cases}1 & x<y\\ x & x>y\end{cases}$ می‌باشد.

حل:

ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.

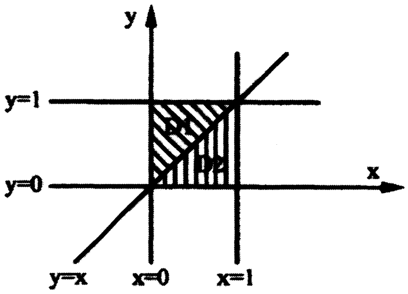


$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}\quad\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=-\sqrt{y}}^{y}(1)\,dx\,dy+\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x}(x)\,dy\,dx\quad\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}dy.x\Big|_{-\sqrt{y}}^{y}+\int_{x=0}^{1}dx.xy\Big|_{x^2}^{x}$$

$$\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}\left(y+\sqrt{y}\right)dy+\int_{x=0}^{1}\left(x^2-x^3\right)dx=+\frac{7}{6}+\frac{1}{12}=\frac{15}{12}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن D به صورت $D:\{(x,y)|0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$ و $f(x,y)=\begin{cases} x & x<y \\ y & x\ge y\end{cases}$.

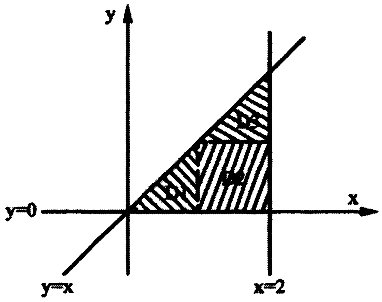
حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$I=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y}x\,dxdy+\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1}y\,dxdy=\int_{y=0}^{1}\frac{1}{2}y^2\,dy+\int_{y=0}^{1}y(1-y)\,dy=\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D([x]+[y])\,dx\,dy$ که در آن D مثلثی با اضلاع $x=2;y=x;y=0$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



$$I=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}=\iint_{D_1}(0+0)dxdy+\iint_{D_2}(1+0)dxdy+\iint_{D_3}(1+1)dx\,dy=0+(D_2\ \text{مساحت ناحیه})+2(D_3\ \text{مساحت ناحیه})=$$

$$(1\times1)+2\times\left(\frac{1\times1}{2}\right)=2$$

۲-۵) تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه:

انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)dx\,dy$ را در نظر بگیرید چنانچه به هر دلیلی بخواهیم ازتغییر متغیرهای $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ استفاده کنیم لازم است نخست تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه (x,y) تعریف شده است را در صفحه (u,v) پیدا کرده (آن را D' می‌نامیم) و سپس تابع $f(x,y)$ را برحسب متغیرهای (u,v) بازنویسی کنیم (آن را $h(u,v)$ می‌نامیم)، در انتها ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات را که با J نشان می‌دهند بدست می‌آوریم.

$$J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Rightarrow \boxed{J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}} \overset{\text{یا}}{\Rightarrow} J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}$$

حال با توجه به اینکه $dx\,dy=|J|du\,dv$ می‌توان نوشت:

$$\boxed{I=\iint_{D'} h(u,v).|J|du\,dv}$$

توجه کنید معمولاً در دو حالت زیر بحث تغییر متغیر مطرح می‌شود:

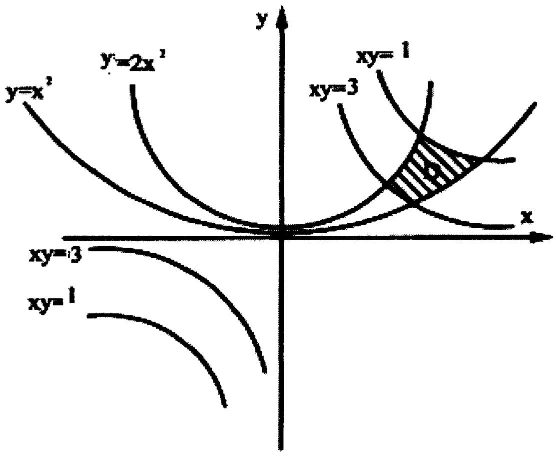
۱ـ پیچیده بودن ناحیه انتگرال‌گیری

۲ـ پیچیده بودن تابع زیر علامت انتگرال‌گیری

مسائل حل شده:

مثال ۱: مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2$ ؛ $y=2x^2$ ؛ $xy=1$ ؛ $xy=3$ را بدست آورید؟

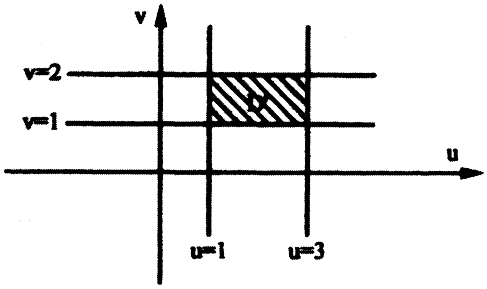
حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم:



با توجه به پیچیده بودن ناحیه D از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}xy=u\\ \frac{y}{x^2}=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=1\Rightarrow u=1\\ xy=3\Rightarrow u=3\\ y=x^2\Rightarrow v=1\\ y=2x^2\Rightarrow v=2\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم کرده و سپس ژاکوبین دستگاه را حساب می‌کنیم:



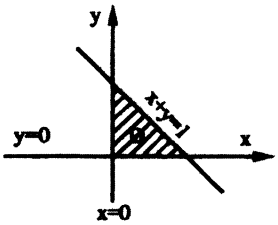
$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{3y}{x^2}}=\frac{1}{3v}$$

پس در کل داریم:

$$s=\iint_D dx\,dy=\iint_{D'}\left|\frac{1}{3v}\right|du\,dv=\int_{v=1}^{2}\int_{u=1}^{3}\frac{1}{3v}du\,dv=\frac{1}{3}u\Big|_1^3 .\mathrm{Lnv}\Big|_1^2=\frac{2}{3}\mathrm{Ln}2$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$ تحت ناحیه محدود به $x+y=1\ ;\ x=0\ ;\ y=0$ است.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم:



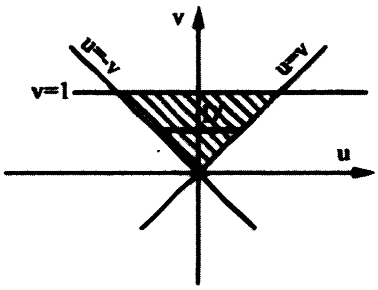
اگر به متن درس مراجعه کنید متوجه می‌شوید که ما بحث تغییر متغیر را در دو حالت مطرح می‌کنیم:

۱ـ پیچیده بودن ناحیه انتگرال‌گیری

۲ـ پیچیده بودن تابع زیر علامت انتگرال

که اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که مسئله ما از نوع دوم است. لذا باید از تغییر متغیر $\begin{cases}x-y=u\\x+y=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\y=\frac{v-u}{2}\end{cases}$ استفاده کنیم.

حال برای رسم ناحیه D' شروط ناحیه D را می‌گذاریم تا شکل ناحیه D' مشخص شود.



$$\begin{cases}x=0\Rightarrow\frac{u+v}{2}=0\Rightarrow u=-v\\ y=0\Rightarrow\frac{v-u}{2}=0\Rightarrow v=u\Rightarrow u=+V\\ x+y=1\Rightarrow v=1\end{cases}$$

حال ژاکوبین دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

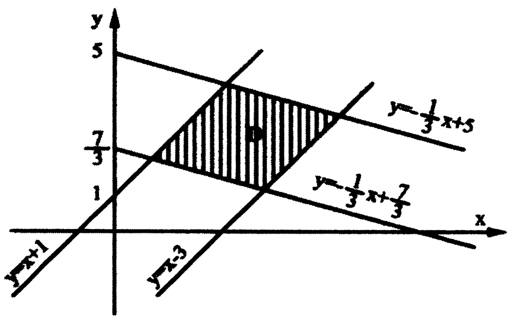
$$I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}.\left|\frac{1}{2}\right|dudv=\int_{v=0}^{1}\int_{u=-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}.du.dv=\int_{v=0}^{1}\frac{1}{2}dv.\,v.e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)\int_{v=0}^{1} vdv=\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)=\frac{e^2-1}{4e}$$

مثال ۳: انتگرال دوگانه $I=\iint_D (y-x)\,dx\,dy$ را، که در آن D بین خطوط زیر محصور شده است را محاسبه کنید؟

$$y=x+1;\, y=x-3;\, y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3};\, y=-\frac{1}{3}x+5$$

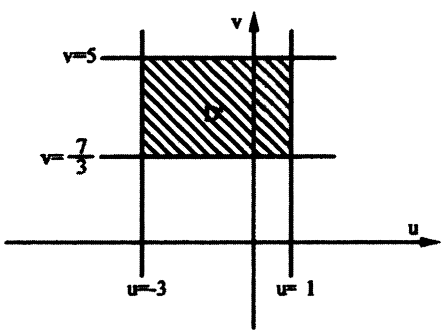
حل: ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم:



همانطور که ملاحظه می‌شود بنا به پیچیده بودن ناحیه D باید از تغییر متغیر استفاده کنیم لذا داریم:

$$\begin{cases}u=y-x\\ v=\frac{1}{3}x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-x=1\Rightarrow u=1\\ y-x=-3\Rightarrow u=-3\\ \frac{1}{3}x+y=\frac{7}{3}\Rightarrow v=\frac{7}{3}\\ \frac{1}{3}x+y=5\Rightarrow v=5\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم می‌کنیم:



حال ژاکوبین دستگاه را بدست می‌آوریم:

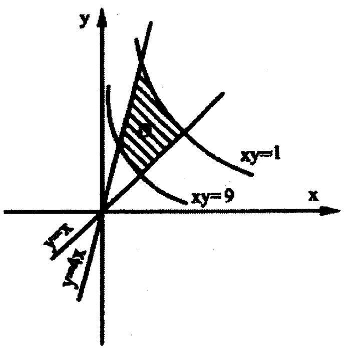
$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{3} & 1\end{vmatrix}}=-\frac{3}{4}$$

و با توجه به اینکه $|J|=\frac{3}{4}$ است لذا داریم:

$$I=\iint_D (y-x)\,dx\,dy=\int_{v=\frac{7}{3}}^{5}\int_{u=-3}^{1}\frac{3}{4}u.du\,dv=-8$$

مثال ۴: انتگرال دوگانه $\iint_D\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$ را، که در آن D ناحیه واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولی‌های $xy=9;xy=1$ وخطوط $y=4x, y=x$ می‌باشد را محاسبه کنید.

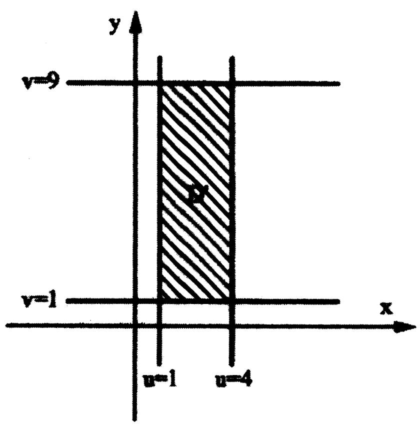
حل: ابتدا ناحیه مربوطه را رسم می‌کنیم:



همانطور که ملاحظه می‌شود با توجه به پیچیده بودن ناحیه D باید از تغییر متغیر $\begin{cases}y=ux\\ xy=v\end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=u\\ xy=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1\\ u=4\\ v=1\\ v=9\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم می‌کنیم:



حال ژاکوبین دستگاه را بدست می‌آوریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{-1}{2u}$$

و با توجه به اینکه $|J|=\dfrac{1}{2u}$ است لذا داریم:

$$I=\iint_D\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy=\iint_{D'}\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right).\frac{1}{2u}du.dv\Rightarrow\int_{v=1}^{9}\int_{u=1}^{4}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{v}}{u}\right)du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{v=1}^{9}\left[2u^{\frac{1}{2}}+\sqrt{v}\,\mathrm{Ln}\,u\right]\Bigg|_1^4dv=\frac{1}{2}\int_{v=1}^{9}\left(2+\sqrt{v}\,\mathrm{Ln}4\right)dv=8+\frac{52}{3}\mathrm{Ln}\,2$$

۲-۶) استفاده از مختصات قطبی در انتگرال‌های دوگانه:

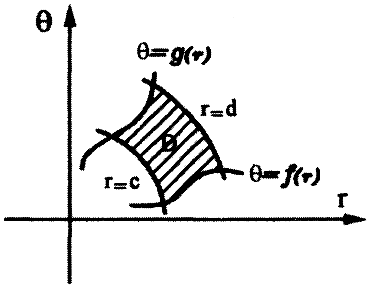
همانطور که می‌دانیم متغیرهای دستگاه مختصات قطبی (r,θ) عبارتند از:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\\ |J|=r\Rightarrow dx\,dy=rdrd\theta\end{cases}$$

در بسیاری مواقع با وجود ترمهایی نظیر $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ در منحنی‌های مرزی یا در تابع زیر انتگرال، اعمال تغییر متغیرهای زیـر مناسـب است:

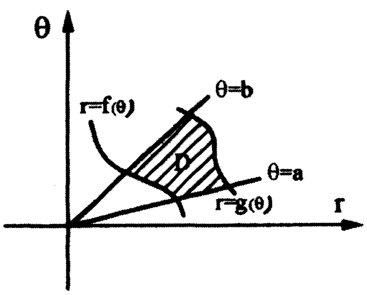
$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}\Rightarrow dxdy=(abr)drd\theta$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$$

نکته ۱: در صورتیکه میدان D نسبت به θ منظم باشد، المان محیطی انتخاب می‌کنیم



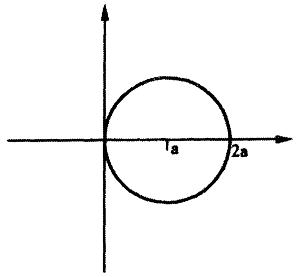
$$\int_{r=c}^{r=d}\int_{\theta=f(r)}^{\theta=g(r)}P(r,\theta)\,d\theta dr$$

در صورتیکه میدان D نسبت به r منظم باشد، المان شعاعی انتخاب می‌کنیم.

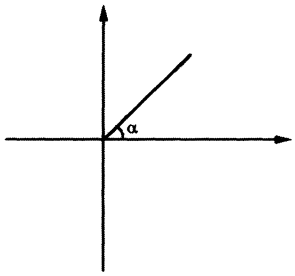


$$\int_{\theta=a}^{\theta=b}\int_{r=f(\theta)}^{r=g(\theta)}P(r,\theta)\,drd\theta$$

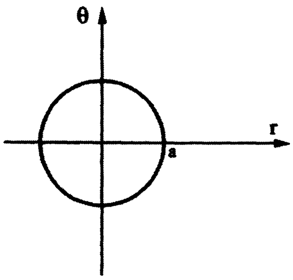
نکته ۲: شکل‌های چند منحنی زیر که در فرم قطبی توصیف شده‌اند را به خاطر داشته باشید.



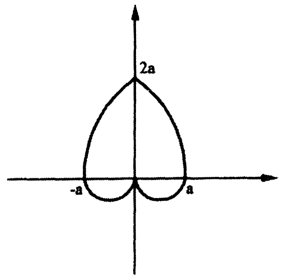
$r = 2a\cos\theta$



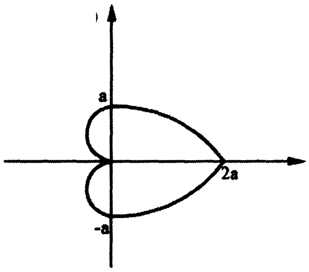
$\theta = \alpha$



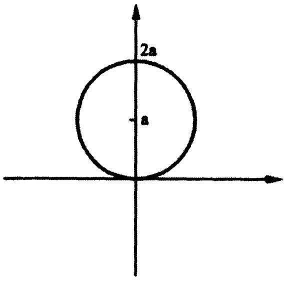
$r = a$



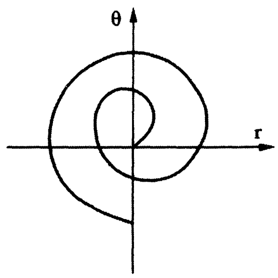
$r = a(1+\sin\theta)$



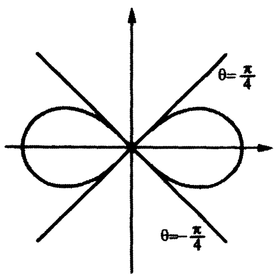
$r = a(1+\cos\theta)$



$r = 2a\sin\theta$



$r = \theta$

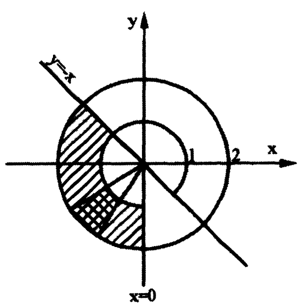


$r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I = \iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور بین دوایر $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 1$ و خطوط $y = -x$ و $x = 0$ است.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم.



ناحیه محصور را به‌صورت زیر در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1 \\ x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2 \\ y=-x \Rightarrow \theta=\dfrac{3\pi}{4} \\ x=0 \Rightarrow \theta=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

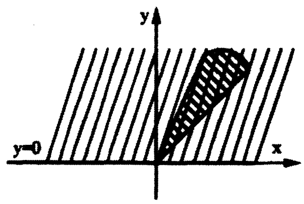
$$\Rightarrow \quad I=\iint_D \left(x^2-y^2\right)dxdy=\int_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{r=1}^{2}\left(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right).r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad I=\int_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{r=1}^{2} r^3\cos 2\theta\,drd\theta=\int_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 2\theta.d\theta\left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad I=\frac{15}{4}\int_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 2\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad I=\frac{15}{8}\sin 2\theta\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{15}{8}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه $I=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



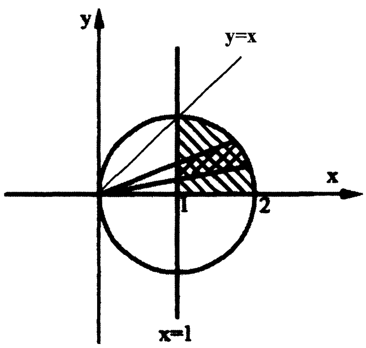
$$D:\begin{cases} x=+\infty \\ x=-\infty \\ y=0 \\ y=+\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0\le r\le +\infty \ ;\ 0\le\theta\le\pi$$

$$I=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}} I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2}.rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}d\theta.\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}=(\pi-0)\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۳: انتگرال دوگانه $I=\iint_D xdydx$ که در آن D ناحیه محصور بین دایره $y\ge 0;\ x\ge 1;(x-1)^2+y^2=1$ را محاسبه کنید؟

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم:



نکته: دایره‌ای که مرکزش در مبدأ باشد $r=cte$ است ولی اگر مرکزش در مبدأ نباشد باید معادله دایره را نوشت و r را از آن تعیین کرد.

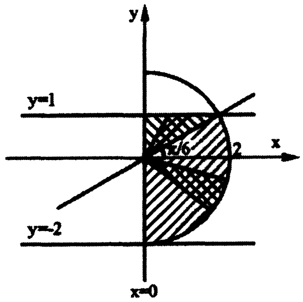
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow r\cos\theta=1 \Rightarrow r=\dfrac{1}{\cos\theta} \\ (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta \end{cases}$$

$$I=\iint_D x\,dy\,dx \Rightarrow \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}(r\cos\theta)r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta.\frac{r^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\left(8\cos^4\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\left(\frac{3\pi+4}{12}\right)$$

مثال ۴: انتگرال دوگانه $I=\int_{-2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ را در مختصات قطبی بنویسید.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



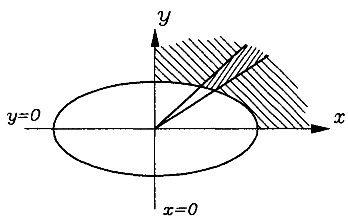
بدیهی است که ناحیه فوق نسبت به متغیر r نامنظم است لذا ناحیه فوق را به دو قسمت تبدیل می‌کنیم و انتگرال فوق را به صورت مجموع دو انتگرال می‌نویسیم.

$$I=\int_{-2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\tan^{-1}\frac{y}{x}dx\,dy=\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{2}\theta.rdrd\theta+\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\frac{1}{\sin\theta}}\theta.rdrd\theta$$

مثال ۵: مطلوب است محاسبه $I=\iint_D\dfrac{dxdy}{\frac{x^2}{4}+y^2}$ که در آن D به صورت زیر می‌باشد.

$$D:\left\{(x,y)\Big|\frac{x^2}{4}+y^2\ge 1; x\ge 0; y\ge 0\right\}$$

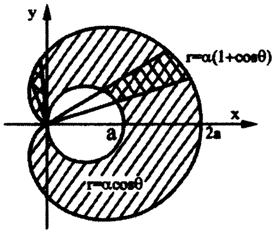
حل: با توجه به نکته ۱ و پس از رسم ناحیه D داریم:



$$\left.\begin{matrix} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ dx\,dy=2rdr\,d\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=\iint_D\frac{dx\,dy}{\frac{x^2}{4}+y^2}=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{+\infty}\frac{2\times1\times r\,dr\,d\theta}{r^2}=2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta.\mathrm{Ln}r\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty$$

مثال ۶: مطلوب است محاسبه سطح محصور بین $r = a\cos\theta, r = a(1+\cos\theta)$ ؟

حل: ابتدا ناحیه D را با استفاده از نکته ۲ مشخص می‌کنیم.



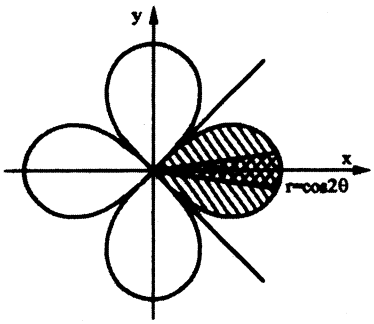
بدیهی است که ناحیه فوق کاملاً متقارن است یعنی اگر مساحت قسمت بالایی را بدست آوریم و در ۲ ضرب کنیم مساحت کل ناحیه بدست می‌آید و نیز ناحیه فوق نسبت به r نامنظم است که برای منظم شدن ناحیه فوق باید ناحیه را به دو قسمت تبدیل کنیم لذا داریم:

$$s = 2\times\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} r dr d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r dr d\theta\right] = \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\Big|_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2\Big|_{0}^{a(1+\cos\theta)} d\theta\right]$$

$$= a^2(\theta+2\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^2\left(\frac{3\theta}{2}+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2$$

مثال ۷: مساحت یکی از گلبرگ‌های رز چهارپر $r = \cos 2\theta$ را بیابید.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم.



$$D:\left\{(r,\theta)\Big| -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\ ;\ 0\le r\le\cos 2\theta\right\}$$

$$S = \iint_D dxdy = \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\left(\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

فصل چهارم

انتگرال‌های سه‌گانه

۱) مسائل انتگرال سه‌گانه در دستگاه مختصات دکارتی:

برای محاسبه انتگرال سه‌گانه‌ای مانند $I=\int_{x=a}^{b}\int_{y=m(x)}^{n(x)}\int_{z=f(x,y)}^{Q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$، روال کلی مانند حل انتگرال دوگانه با حدود مشخص شده می‌باشد. طبیعی است، مشکل اصلی قرار دادن حدود انتگرال با توجه به رویه‌های محصور کننده ناحیه انتگرال‌گیری می‌باشد.

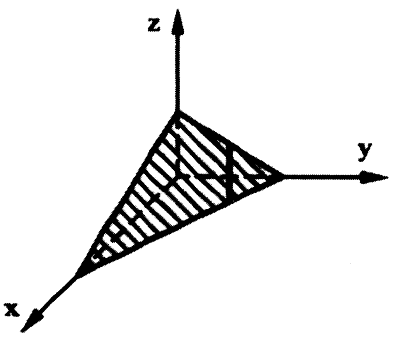
بدیهی است به عنوان ساده‌ترین کاربرد انتگرال‌های سه‌گانه داریم:

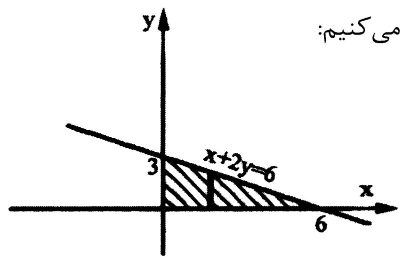
$$v=\iiint_v dx\,dy\,dz:$$ حجم ناحیه محصور شده به چند رویه

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال سه‌گانه $I=\iiint_v (x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz$ که در آن v حجم محدود شده به صفحه $x+2y+3z=6$ و صفحات مختصات است.

حل: ابتدا صفحه فوق را رسم می‌کنیم:



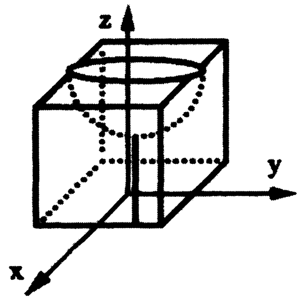


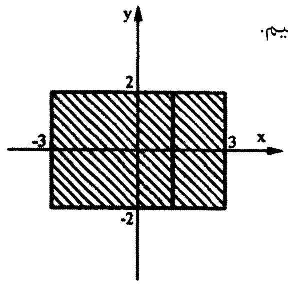
$$I=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{6-x}{2}}\int_{z=0}^{\frac{6-x-2y}{3}}(x+2y+3z)\,dz\,dy\,dx=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{6-x}{2}}\left[(x+2y)z+\frac{3}{2}z^2\right]_0^{\frac{6-x-2y}{3}}dy\,dx$$

$$=\frac{+1}{6}\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{6-x}{2}}\left(36-x^2-4y^2-4xy\right)dy\,dx=\frac{1}{6}\int_{x=0}^{6}\left(36y-x^2y-\frac{4}{3}y^3-2xy^2\right)\Bigg|_0^{\frac{6-x}{2}}dx=27$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه حجم محصور شده به صفحات $x=3, x=-3, y=2, y=-2$ که از پایین به صفحه $z=0$ و از بالا به رویه سهموی $z=4+x^2+y^2$ محدود شده است.

حل: ابتدا صفحات فوق را رسم می‌کنیم.

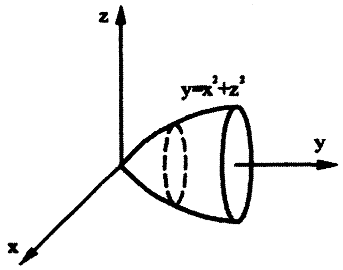




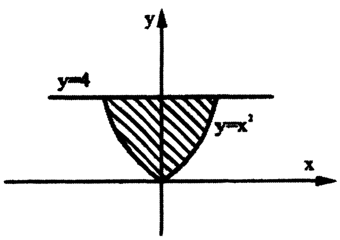
$$v=\int_{x=-3}^{3}\int_{y=-2}^{2}\int_{z=0}^{4+x^2+y^2}dz\,dy\,dx=\int_{x=-3}^{3}\int_{y=-2}^{2}z\Big|_0^{4+x^2+y^2}dy\,dx=\int_{x=-3}^{3}\int_{y=-2}^{2}\left(4+x^2+y^2\right)dy\,dx=$$

$$\int_{x=-3}^{3}\left[4y+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=-2}^{2}dx=\int_{x=-3}^{3}\left(8+2x^2+\frac{8}{3}+8+2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\int_{x=-3}^{3}\left(4x^2+\frac{64}{3}\right)dx=\frac{4}{3}x^3+\frac{64}{3}x\Big|_{-3}^{3}=200$$

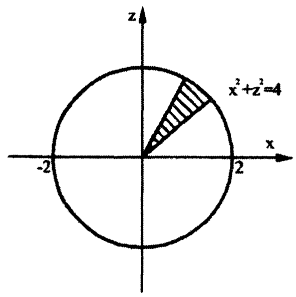
مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال سه‌گانه $\iiint_R \sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ که در آن R ناحیه محصور بین $y=4, y=x^2+z^2$ است.



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



تصویر ناحیه روی صفحه xy



تصویر ناحیه روی صفحه xz

اگر ناحیه را در جهت z منظم بگیریم، آنگاه مشاهده می‌شود که z بین $\sqrt{y-x^2}, -\sqrt{y-x^2}$ و نیز y بین $y=4, y=x^2$ واقع شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\iiint_R \sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=x^2}^{4}\int_{z=-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

بدیهی است که محاسبه تابع اولیه فوق کار بسیار مشکلی است بنابراین برای حل مثال فوق باید ناحیه را در یکی از دو جهت y یا x منظم بگیریم.

لذا می‌توان نوشت:

$$\iiint_R \sqrt{x^2+z^2}\,dv = \int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{y=x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\,dz\,dx = \int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y.\sqrt{x^2+z^2}\Big|_{y=x^2+z^2}^{4}\,dz\,dx$$

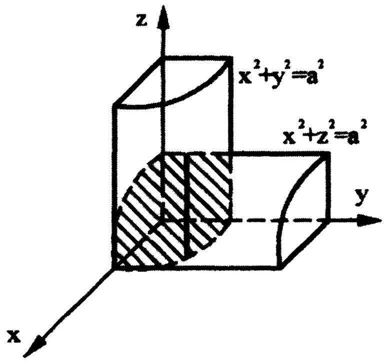
$$= \int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right).\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx$$

گرچه محاسبه انتگرال مکرر فوق ممکن است، ولی برای حل انتگرال مکرر فوق می‌توان از مختصات قطبی استفاده کرد.

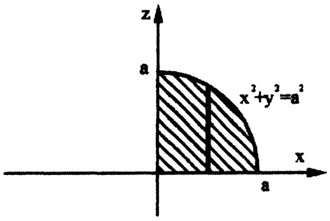
$$\int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right).\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx \xrightarrow[0\le\theta\le 2\pi\,;\,0\le r\le 2]{x^2+z^2=r^2} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(4-r^2\right).r.rdrd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(4r^2-r^4\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{5}r^5\Big|_0^2\,d\theta = \frac{64}{15}.[\theta]\Big|_0^{2\pi} = \frac{128}{15}\pi$$

مثال ۴: حجم محدود به استوانه‌های $x^2+z^2=a^2\,;x^2+y^2=a^2$ که در یک هشتم اول دستگاه مختصات واقع شده است را محاسبه کنید؟



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:

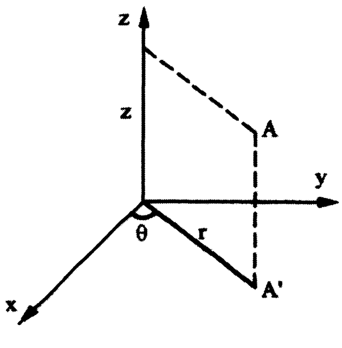


$$v = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} z\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}.y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int_{x=0}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow v = a^2x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = a^3-\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$$

۲) مسائل انتگرال سه‌گانه در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

متغیرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) هستند که با توجه به شکل زیر انتخاب می‌شوند.



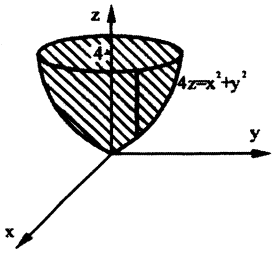
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} ; \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = Arc\,tg\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

و نیز می‌توان نشان داد:

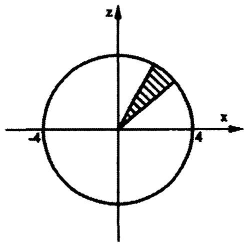
$$\boxed{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است انتگرال سه‌گانه $I = \iiint_V (x^2+y^2)dv$ که در آن V حجم محصور شده به سهموی $4z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 4$ می‌باشد.



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



با استفاده از مختصات استوانه‌ای داریم:

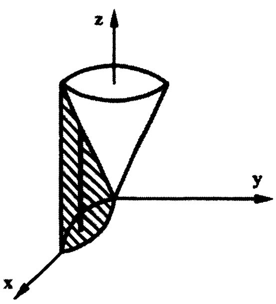
$$x^2 + y^2 = 4z \Rightarrow r^2 = 4z \Rightarrow z = \frac{r^2}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} z = \dfrac{r^2}{4} \\ z = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow 0 \le r \le 4 \; ; \; 0 \le \theta \le 2\pi$$

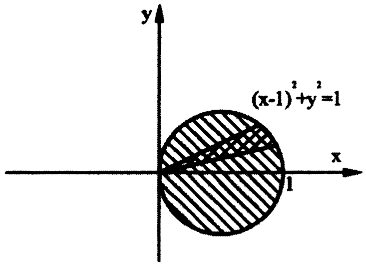
$$I = \iiint_V (x^2+y^2)dv = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=\frac{r^2}{4}}^{4} (r^2).r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4} r^3 z\Big|_{z=\frac{r^2}{4}}^{4} dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left(4r^3 - \frac{r^5}{4}\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(r^4 - \frac{r^6}{24}\right)\Big|_{r=0}^{4} d\theta = \frac{256}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{512\pi}{3}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه حجم محدود شده به مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ که در بالای صفحه xoy واقع شده است.



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



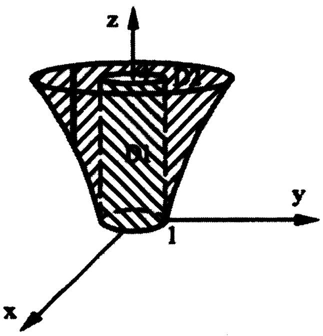
$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z=r$$

$$x^2+y^2=2x\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=2\cos\theta$$

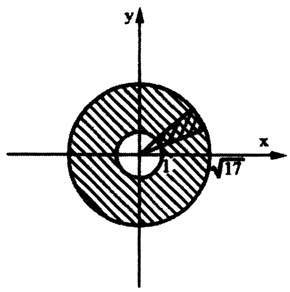
$$v=\iiint_R dv=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=0}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r\,z\Big|_0^r dr\,d\theta=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta\Rightarrow v=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$V=\frac{8}{3}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{8}{3}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)(\cos\theta\,d\theta)d\theta=\frac{16}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{9}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه حجم محدود شده به صفحات $z=4, z=0$ و هذلولی‌گون $x^2+y^2-z^2=1$؟



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\Rightarrow r^2-z^2=1\Rightarrow z=\sqrt{r^2-1}\\ z=0\Rightarrow x^2+y^2=1\\ z=4\Rightarrow x^2+y^2=17\end{cases}\Rightarrow 1\le r\le\sqrt{17}\ ;0\le\theta\le 2\pi$$

بدیهی است که حجم محدود شده فوق از دو قسمت تشکیل شده است.

۱) D_1: حجم یک استوانه.

۲) D_2: حجم ناحیه بین هذلولی‌گون و استوانه.

$$v=\overbrace{\pi(1)^2.4}^{\text{حجم استوانه}}+\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{17}}\int_{z=\sqrt{r^2-1}}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta=4\pi+\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{17}} r.z\Big|_{\sqrt{r^2-1}}^{4}dr\,d\theta=4\pi+\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{17}}\left(4r-r\sqrt{r^2-1}\right)dr\,d\theta$$

یادآوری:

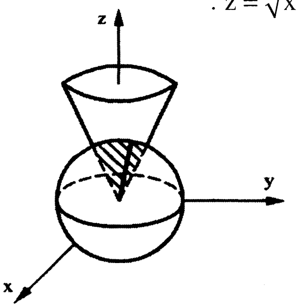
$$\int_{r=1}^{\sqrt{17}}\left(4r-r.\sqrt{r^2-1}\right)dr\xrightarrow[\int_{r=1}^{\sqrt{17}}\left(4r-r.\sqrt{r^2-1}\right)dr=\int_{r=1}^{\sqrt{17}}4r\,dr-\int_{r=1}^{\sqrt{17}}\left(r.\sqrt{r^2-1}\right)dr]{\sqrt{r^2-1}=u\Rightarrow dr=\frac{u\,du}{r}}\left[2r^2\right]\Big|_1^{\sqrt{17}}-\int_{u=0}^{4}u^2du=32-\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow v = 4\pi + \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{32}{3} d\theta = 4\pi + \frac{64\pi}{3} = \frac{76\pi}{3}$$

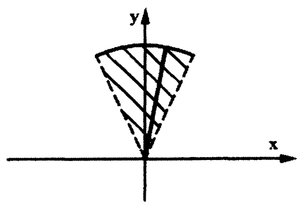
توجه: اگر بخواهیم انتگرال‌گیری را با متغیر r شروع کنیم، به واسطه منظم بودن نسبت به r می‌توان نوشت:

$$v = \int_{z=0}^{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r\,dr\,d\theta\,dz$$

مثال ۴: مطلوب است حجم محدود به کره با معادله $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل مخروط دوار $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



نخست محل تقاطع دو رویه را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

حال با استفاده از مختصات استوانه‌ای داریم:

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{z=r}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r.[z]_r^{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(r\sqrt{1-r^2}-r^2\right)dr\,d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{6}\right) d\theta = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$$

مثال ۵: حاصل $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dr$ که در آن V حجم محصور به استوانه $x^2+y^2=2x$ و صفحات $z=0$، $z=a$ و $y=0$ می‌باشد، را بدست آورید؟

حل:

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

با توجه به آن‌که مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار ندارد لذا باید از معادله دایره فوق برای تعیین حدود r استفاده کنیم.

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

$$\left\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\le r\le 2\cos\theta\right\}$$

$$I = \iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dv = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2\cos\theta} \int_{z=0}^{a} z.r.r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2\cos\theta} r^2.\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a dr\,d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{6} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\theta\,d\theta = \frac{8a^2}{6} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{4a^3}{3}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^2}{9}$$

مثال ۶: حجم جسم صلبی که از پایین به صفحه xoy و از بالا بـه سـهمی‌گـون $z = x^2 + y^2$ و از اطـراف بـه هـذلولی‌گـون یکپارچـه $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} + 1$ محصور شده است، را بیابید؟

حل: به دلیل اینکه رویه‌های مطرح در مساله همگی نسبت به محور zها متقارن است (یعنـی بـا عمـل $x \mapsto -x$ و $y \mapsto -y$ عـوض نمی‌شوند) داریم:

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \,; \\ z = x^2 + y^2 \;;\; (x^2 + y^2) = \dfrac{z^2 + 4}{4} \Rightarrow \dfrac{z^2 + 4}{4} = z \Rightarrow (z-2)^2 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow 0 \le z \le 2 \\ \sqrt{z} \le r \le \sqrt{1 + \dfrac{z^2}{4}} \end{cases}$$

$$v = \iiint_R dv = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2} \int_{r=\sqrt{z}}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} r\,dr\,dz\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{z}}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} dz\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z^2}{4} - z\right) dz\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2} \left(\frac{z^2}{8} - \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) dz\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{z^3}{24} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

مثـال ۷: مطلـوب اسـت محاسـبه $I = \iiint_V x^2 dx\,dy\,dz$ کـه در آن ناحیـه V محصـور بـه کـره‌هـای تـوپر $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ می‌باشد.

حل:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \,;\; 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2} \,;\; 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$I = \iiint_V x^2 dx\,dy\,dz = \iiint_V (r\cos\theta)^2 r.dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{z=1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^3 \cos^2\theta dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3 \cos^2\theta . [z]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-r^2} - 1\right) r^3 \cos^2\theta dr\,d\theta$$

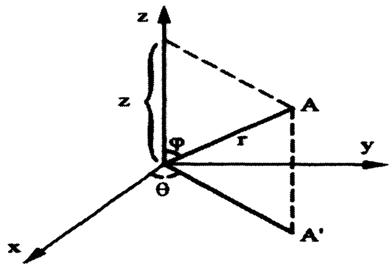
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2r^3\sqrt{1-r^2} - r^3\right).\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right).\left[\frac{2(r^2-1)(3r^2+2).\sqrt{1-r^2}}{15} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{53}{960}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{53}{960}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{53\pi}{960}$$

توجه: حل این مسئله در مختصات کروی نیز قابل انجام است.

۳) مسائل انتگرال سه‌گانه در دستگاه مختصات کروی:

متغیرهای دستگاه مختصات کروی (r,θ,φ) می‌باشند که با توجه به شکل زیر انتخاب می‌شوند.



$$\begin{cases} x = r.\sin\varphi.\cos\theta \\ y = r.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = r.\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{y}{x} \\ \varphi = \operatorname{Arc\cos}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \qquad ; dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

بدیهی است که حدود تغییرات متغیرهای (r,θ,φ) برای آنکه بتوان کل فضای سه بعدی را با یک تناظر یک به یک جارو کند، چنین است.

$$\boxed{r \in [0,+\infty)\ ;\ \theta \in [0,2\pi]\ ; \varphi \in [0,\pi]}$$

نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

۱) رابطه $\theta = \theta_0$ بیانگر نیم صفحه‌ای است عمود بر صفحه xoy که از یک طرف به محور zها محدود شده است و با جهت مثبت محور xها زاویه θ_0 را می‌سازد.

۲) رابطه $r = a$ در مختصات استوانه‌ای بیانگر استوانه‌ای است که محور آن موازی zها است و دایره هادی آن، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a است و در مختصات کروی بیانگر کره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a.

۳) رابطه $z = ar\ (a > 0)$ در مختصات استوانه‌ای بیانگر مخروطی است که مرکز آن در مبدأ مختصات است و محور آن محور zها می‌باشد و رابطه $\varphi = \varphi_0$ در مختصات کروی بیانگر مخروطی است که رأس آن در مبدأ مختصات بوده و محور آن، محور zها است و البته زاویه رأس این مخروط $2\varphi_0$ است.

۴) وجود عبارت‌هایی مانند $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ در مسائل انتگرال‌های سه‌گانه، ما را وادار به تغییر متغیرهایی مشابه دستگاه مختصات کروی می‌نماید.

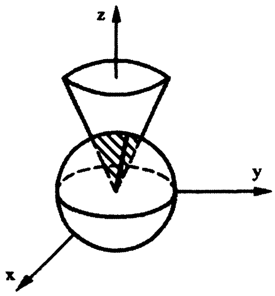
$$\begin{cases} x = a\,r\sin\varphi.\cos\theta \\ y = b\,r\sin\varphi.\sin\theta \\ z = c\,r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad dx\,dy\,dz = a.b.c\ r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال سه‌گانه $I=\iiint_v z\,dv$ که در آن v حجم محدود شده به داخل مخروط $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:

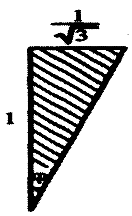


$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)} \Rightarrow \frac{z^2}{3}=\left(x^2+y^2\right)$$

برای پیدا کردن مقدار زاویه φ یک مقدار به z می‌دهیم تا مقدار $\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}$ بدست آید و سپس تشکیل یک مثلث می‌دهیم تا زاویه φ پیدا شود.

$$z=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$I=\iiint_v z\,dv=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r\cos\varphi).\left(r^2\sin\varphi\right)dr\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}r^3\sin2\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

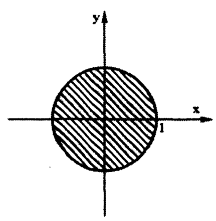
$$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r^4}{4}.\Big|_0^2\sin2\varphi\,d\theta\,d\varphi=2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}2\pi.\sin2\varphi\,d\varphi=4\pi.\frac{-1}{2}\left[\cos2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}=\pi$$

حل به روش مختصات استوانه‌ای:

$$x^2+y^2+z^2=4\xrightarrow{z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}}x^2+y^2+3x^2+3y^2=4\Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$I=\iiint_v z\,dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=\sqrt{3r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}z.r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left[z^2\right]_{r\sqrt{3}}^{\sqrt{4-r^2}}r\,dr\,d\theta$$

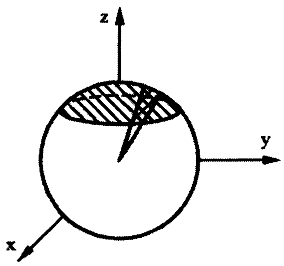
$$=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(r-r^3\right)dr\,d\theta=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta=2.\frac{1}{4}.[\theta]_0^{2\pi}=\pi$$



مثال ۲: انتگرال سه‌گانه $I=\iiint_v (x^2+y^2+z^2)dv$ که در آن v، حجم محدود شده به بالای صفحه $z=b$ و محدود به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می‌باشد را در مختصات استوانه‌ای و کره‌ای بنویسید؟

حل به روش مختصات کروی:

ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow r=a \\ z=b \Rightarrow r\cos\varphi=b \Rightarrow r=\dfrac{b}{\cos\varphi} \end{cases}$$

برای پیدا کردن مقدار زاویه φ، از تقاطع دو مقدار r به دست آمده خواهیم داشت:

$$\cos\varphi=\frac{b}{a}$$

$$I=\iiint_v (x^2+y^2+z^2)dv=\int_{\varphi=0}^{\cos^{-1}(b/a)}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\frac{b}{\cos\varphi}}^{a}(r^2)r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi=\frac{2\pi}{5}\left(a^5+\frac{b^5}{4}-\frac{5a^4b}{4}\right)$$

حل به روش مختصات استوانه‌ای:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow r^2+z^2=a^2 \Rightarrow z=\sqrt{a^2-r^2} \\ z=b \end{cases} \to b=\sqrt{a^2-r^2} \to r=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-b^2}}\int_{z=b}^{\sqrt{a^2-r^2}}(r^2+z^2)r\, dz\, dr\, d\theta \Rightarrow I=\frac{2\pi}{5}\left(a^5+\frac{b^5}{4}-\frac{5a^4b}{4}\right)$$

مثال ۳: حجم محصور به سطح $(x^2+y^2+z^2)^3=xyz$ که در یک هشتم اول دستگاه مختصات واقع است را بدست آورید؟

حل:

$$(x^2+y^2+z^2)^3=xyz \Rightarrow (r^2)^3=(r\sin\varphi\cos\theta).(r\sin\varphi\sin\theta).(r\cos\varphi) \Rightarrow r^3=\sin^2\varphi\cos\theta\,\sin\theta\cos\varphi$$

$$v=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\sqrt[3]{\sin^2\varphi.\cos\theta.\sin\theta.\cos\varphi}} r^2.\sin\varphi.dr\, d\theta\, d\varphi=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin^2\varphi.\cos\theta.\sin\theta.\cos\varphi\right)\sin\varphi\, d\theta.d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi.\cos\varphi\, d\varphi.\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta.\cos\theta\, d\theta=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال سه‌گانه $I=\iiint\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv$ که در آن v حجم محدود به بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ می‌باشد (در $\frac{1}{8}$ اول مختصات).

حل: با استفاده از تغییر متغیرهای شبه قطبی داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$$

$$I=\iiint_v\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} r^2.abc.r^2.\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$=abc.(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}.(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}.\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_{r=0}^{1}=(abc).(1).\left(\frac{\pi}{2}\right).\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{abc}{10}.\pi$$

مثال ۵: مطلوب است محاسبه حجم داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و بین کرات $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=16$.

حل: حدود تغییرات r را از دو معادله کره می‌توان بدست آورد.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \quad \Rightarrow \quad r=1 \\ x^2+y^2+z^2=16 \quad \Rightarrow \quad r=4 \end{cases} \Rightarrow \quad 1\le r\le 4$$

و برای تعیین حدود تغییرات φ داریم $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

پس با توجه به مطالب بالا حدود تغییرات متغیرها (r,φ,θ) به صورت زیر است:

$$\left\{0\le\theta\le 2\pi\,;\,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\,;\,1\le r\le 4\right\}$$

$$I=\iiint_V dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=1}^{4} r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi.\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^4 d\varphi\, d\theta \Rightarrow V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{63}{3}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{63}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{63}{3}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta \Rightarrow V=\frac{63}{3}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right).2\pi=42\pi\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

مثال ۶: هر گاه V حجم محصور به شروط $z=r$ و صفحه $z=4$ فرض گردد حاصل انتگرال زیر را بدست آورید؟

$$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

حل: برای حل مثال فوق ابتدا از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} z=r \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow r=4 \Rightarrow 0\le r\le 4$$

محدوده تغییرات کلیه متغیرها به صورت مقابل است: $\{0\le\theta\le 2\pi\,;\,0\le r\le 4\,;\,r\le z\le 4\}$

لذا خواهیم داشت:

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4}(r^2+z^2)r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left[r^3z+\frac{rz^3}{3}\right]_r^4 dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left(4r^3+\frac{64}{3}r-r^4-\frac{r^4}{3}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left(-\frac{4}{3}r^4+4r^3+\frac{64}{3}r\right)dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\frac{4}{15}r^5+r^4+\frac{32}{3}r^2\right]_0^4 d\theta=2\pi\times\frac{768}{5}=\frac{1536}{5}\pi$$

حل مثال فوق با استفاده از مختصات کروی:

همان‌طوری‌که می‌دانید متغیر r در مختصات استوانه‌ای برابر $r=\sqrt{x^2+y^2}$ است. لذا با تبدیل مقادیر فوق در مختصات کروی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} z=4 \Rightarrow r\cos\varphi=4 \Rightarrow r=\dfrac{4}{\cos\varphi} \\ z=r=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

محدوده تغییرات کلیه متغیرها (r,φ,θ) به صورت زیر است:

$$\left\{0\le\theta\le 2\pi\,;\,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\,;\,0\le r\le\frac{4}{\cos\varphi}\right\}$$

$$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{\frac{4}{\cos\varphi}} r^4\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi.\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\frac{4}{\cos\varphi}} d\varphi\, d\theta$$

$$\frac{4^5}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi.(\cos\varphi)^{-5}\,d\varphi\,d\theta=\frac{1024}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{4}(\cos\varphi)^{-4}\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1024}{5}\times\frac{3}{4}\times\left[\theta\right]_0^{2\pi} \Rightarrow I=\frac{1536}{5}\pi$$

فصل پنجم

انتگرال‌های منحنی الخط

۱) انتگرال‌های منحنی الخط نوع اول:

یک انتگرال منحنی الخط نوع اول به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{I=\int_c f(x,y,z)\,ds}$$

C یک منحنی تعریف شده است و ds المان طول قوس بر روی منحنی مذکور می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}}$$

قاعده کلی در محاسبه این نوع انتگرال‌ها آن است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرهای (x,y,z) در روی منحنی c وجود دارد، تمام متغیرها در f و ds بر حسب یک متغیر بنویسیم و حدود تغییرات آن متغیر را نیز مشخص کنیم، بدین ترتیب مسئله ما تبدیل به یک انتگرال یگانه معمولی می‌شود.

در حالات زیر وضعیت ds را می‌توان به سادگی مشخص کرد:

۱) اگر منحنی c در صفحه با معادله $y = h(x)$ بیان شده باشد داریم:

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + h'^2(x)}\, dx}$$

۲) اگر منحنی c در صفحه با معادله $x = h(y)$ بیان شده باشد داریم:

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + h'^2(y)}\, dy}$$

۳) اگر منحنی c در صفحه با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = P(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ بیان شده باشد داریم:

$$\boxed{ds = \sqrt{P'^2(t) + q'^2(t)}\, dt}$$

۴) اگر منحنی c در صفحه با معادله قطبی $r = h(\theta)$ بیان شده باشد داریم:

$$\boxed{ds = \sqrt{h^2(\theta) + h'^2(\theta)}\, d\theta}$$

۵) اگر منحنی c در فضا با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = P(t) \\ y = q(t) \\ z = r(t) \end{cases}$ بیان شده باشد داریم:

$$\boxed{ds = \sqrt{P'^2 + q'^2 + r'^2}\, dt}$$

نکته ۱: به عنوان بدیهی ترین کاربرد انتگرال منحنی الخط نوع اول می‌توان به محاسبه طول قوس یک منحنی پرداخت بدین ترتیب که $\int_c ds$ مبین طول منحنی c خواهد بود.

نکته ۲: فرض کنید c یک منحنی در صفحه باشد چنانچه این منحنی را حول محورهای مختصات دوران دهیم سطح‌های حاصل از دوران به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} s_x &= 2\pi \int_c y.ds \\ s_y &= 2\pi \int_c x\,ds \end{aligned}}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه طول قسمتی از منحنی $\begin{cases} x = e^t.\sin t \\ y = e^t.\cos t \end{cases}$ در فاصله $t=0$ تا $t=1$ ؟

حل:

$$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = e^t \sin t + e^t \cos t \\ y' = e^t \cos t - e^t \sin t \end{cases} \Rightarrow x'^2 + y'^2 = 2e^{2t} \Rightarrow L = \int_{t=0}^{1} ds$$

$$\Rightarrow L = \int_{t=0}^{1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_{t=0}^{1} \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}\, e^t \Big|_{t=0}^{1} = \sqrt{2}(e-1)$$

مثال ۲: طول قوس منحنی $y = \cosh x$ از $x=0$ تا $x = Lna$ کدام است؟

حل:

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$$

$$L = \int_{x=0}^{Lna} \cosh x dx = \sinh x \Big|_0^{Lna} = \sinh(Lna) - \sinh(0) = \frac{e^{Lna} - e^{-Lna}}{2} = \frac{a - \frac{1}{a}}{2} = \frac{a^2-1}{2a}$$

مثال ۳: طول قوس منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\sin t}\, dt$ از $x=0$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

حل: طبق قضیه لایبنیتز از $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'_{(x)} = \sqrt{\sin x} \Rightarrow f'^2_{(x)} = \sin x$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx = -2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

مثال ۴: قسمتی از دلنمای $r = 1 + \sin\theta$ که در ربع اول دستگاه مختصات واقع شده است را حول محور yها دوران داده‌ایم. سطح کامل از دوران را بیابید؟

حل:

$$r = 1+\sin\theta \Rightarrow r' = \cos\theta$$

$$r^2 + r'^2 = (1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = 2 + 2\sin\theta$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \sqrt{2}.\sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

$$s_y = 2\pi. \int_c x\, ds = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)\cos\theta\, ds = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta).\cos\theta.\sqrt{2}.\sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta =$$

$$2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^{\frac{3}{2}}.\cos\theta d\theta \xrightarrow[du=\cos\theta d\theta]{\text{با فرض:}\ u=1+\sin\theta} s_y = 2\sqrt{2}\pi \int_{u=1}^{2} u^{\frac{3}{2}}.\cos\theta.\frac{du}{\cos\theta} = 2\sqrt{2}\pi.\frac{2}{5}.\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5}.(4\sqrt{2}-1)$$

مثال ۵: حاصل $I = \int_C (x^2+y^2+z^2) ds$ را که در آن C منحنی $\vec{r}(t) = e^t \sin t\,\hat{i} + e^t \cos t\,\hat{j} + e^t \hat{k}$ و از $t=0$ تا $t=\ln 3$ طی شده است را بدست آورید.

حل:

اتحاد معروف: $(A-B)^2 + (A+B)^2 = 2(A^2+B^2)$

$$\begin{cases} x(t)=e^t\sin t \\ y(t)=e^t\cos t \\ z(t)=e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=e^t\sin t+e^t\cos t \\ dy=e^t\cos t-e^t\sin t \\ dz=e^t \end{cases}$$

$$ds=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad ds=\sqrt{2(e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}\cos^2 t)+e^{2t}}\,dt=\sqrt{3e^{2t}}\,dt=\sqrt{3}e^t dt$$

و نیز:

$$x^2+y^2+z^2=e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}=2e^{2t}$$

پس:

$$I=\int_{t=0}^{\ln 3}2e^{2t}.\sqrt{3}e^t dt=2\sqrt{3}.\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^{\ln 3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(e^{3\ln 3}-e^0)=\frac{52}{\sqrt{3}}=\frac{52\sqrt{3}}{3}$$

۲) انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم:

۲-۱) قاعده کلی برای محاسبه انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم:

میدان نیروی $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ را در نظر بگیرید، چنانچه $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ بردار موضعی یک نقطه دلخواه در فضا باشد می‌دانیم کار نیروی F روی مسیر دلخواه c به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{w=\int_c \vec{F}.d\vec{r}=\int_c P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz}$$

به انتگرال فوق یک انتگرال منحنی الخط نوع دوم می‌گوییم.

قاعده کلی برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها نیز آن است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرها در روی منحنی c وجود دارد عبارت $(Pdx+Qdy+Rdz)$ را تنها برحسب یک متغیر بنویسیم و با توجه به حدود آن متغیر، انتگرال یگانهٔ معین حاصل را حل می‌کنیم.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I=\int_c (x-y^2)dx+(xy+1)dy$ که در آن c قسمتی از منحنی $x=y^2+y$ می‌باشد که از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(0,-1)$ پیموده شده است.

حل:

$$x=y^2+y \quad \Rightarrow \quad dx=(2y+1)dy$$

حال می‌توان نوشت:

$$I=\int_{y=-1}^{0}(y^2+y-y^2)(2y+1)dy+\left((y^2+y).y+1\right)dy=\int_{y=-1}^{0}(2y^2+y+y^3+y^2+1)dy=\int_{y=-1}^{0}(y^3+3y^2+y+1)dy=\frac{5}{4}$$

مثال ۲: کار نیروی $F = x^2\vec{i} + (y+z)\vec{j} - z\vec{k}$ را از $t=0$ تا $t=1$ بر روی منحنی c که از طریق بردار موضعی $R(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j} - t^2\vec{k}$ توصیف شده است را محاسبه کنید؟

حل: طبق فرمول گفته شده در متن درس داریم:

$$w = \int_c x^2dx + (y+z)dy - zdz$$

روی منحنی c داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \Rightarrow dx = dt \\ y = 2t \Rightarrow dy = 2dt \\ z = -t^2 \Rightarrow dz = -2t\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \quad w = \int_{t=0}^{1} t^2dt + (2t - t^2).2dt - (-t^2).(-2tdt) = \int_{t=0}^{1} (-2t^3 - t^2 + 4t)dt = \frac{7}{6}$$

مثال ۳: اگر c پاره‌خط واصل از نقطه $(0,1)$ به نقطه $(1,2)$ باشد، حاصل انتگرال $\int_c (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$ کدام است؟

حل: معادله پاره‌خط مزبور را می‌نویسیم:

$$c: y - 1 = \frac{2-1}{1-0}(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow dy = dx$$

و چون انتگرال مزبور روی این مسیر است داریم:

$$I = \int_{y=1}^{2} \left((y-1)^2 - y\right)dy + \left(y^2 + y - 1\right)dy \Rightarrow \int_{y=1}^{2} \left(2y^2 - 2y\right)dy = \left(\frac{2}{3}y^3 - y^2\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{3}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه $I = \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$، که در آن c دایره $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $(0 \le t \le 2\pi)$.

حل:

$$\begin{cases} x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin tdt \\ y = a\sin t \Rightarrow dy = a\cos tdt \end{cases}$$

$$I = \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(a\cos t)(a\cos tdt) - (a\sin t)(-a\sin tdt)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin t.\cos t + a^2\sin^2 t} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{a^2}{a^2 + a^2\sin t.\cos t}dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin t\cos t} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

۲-۲) انتگرال‌های منحنی الخط نوع دوم مستقل از مسیر:

همان‌طوری‌که می‌دانیم در وضعیت کلی کار یک نیرو بر روی یک مسیر علاوه بر آنکه به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر وابسته است به خود مسیر نیز بستگی دارد اما اگر میدان نیروی مورد نظر پایستار باشد کار آن نیرو مستقل از مسیر بوده و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد.

میدان نیروی $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را در نظر بگیرید شرط لازم و کافی برای آنکه این میدان نیرو پایستار باشد و به تعبیری $\int Pdx + Qdy + Rdz$ مستقل از مسیر باشد آن است که:

الف) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ باشد و به تعبیری داشته باشیم.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

ب) بتوان F را به صورت گرادیان یک تابع اسکالر مانند $u(x,y,z)$ نوشت. یعنی بتوان uای پیدا کرد که $\vec{\nabla}u = \vec{F}$ باشد که در این صورت u را تابع پتانسیل میدان نیروی پایستار F گفته و برای پیدا کردن u می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

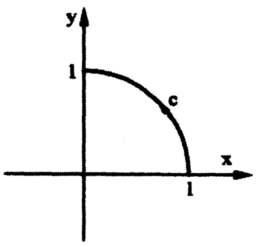
ج) عبارت $(Pdx + Qdy + Rdz)$ یک دیفرانسیل کامل باشد. یعنی بتوان تابع uای پیدا کرد که $Pdx + Qdy + Rdz = du$.

نکته: سه بند الف، ب، ج به یک مفهوم است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال $I = \int_c (x^2 + 2y - 1)dx + (2x + y + e^y)dy$ که در آن c قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد که در ربع اول دستگاه مختصات واقع شده و در جهت مثلثاتی پیموده شده است.

حل: ابتدا ناحیه c را رسم می‌کنیم:



در صورتی که بخواهیم همه متغیرها را برحسب یک متغیر بنویسیم حل خیلی مشکل می‌شود، با کمی دقت متوجه می‌شویم که انتگرال مورد نظر مستقل از مسیر است.

چرا که داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

بنابراین انتگرال مورد نظر مستقل از مسیر بوده و محاسبه آن در هر مسیری که نقطه $(1,0)$ را به $(0,1)$ وصل کند یک پاسخ دارد.

یک راه دیگر بدست آوردن جواب انتگرال فوق بدست آوردن تابع پتانسیل است. لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2 + 2y - 1) \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (2x + y + e^y) \Rightarrow u(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{2} + e^y \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}} u(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2xy - x + e^y$$

$$I = \int_{(1,0)}^{(0,1)} (x^2 + 2y - 1)dx + (2x + y + e^y)dy = \int_{(1,0)}^{(0,1)} du = u\Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2xy - x + e^y\Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = e + \frac{1}{6}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xdx+\left(z^2+2y\right)dy+2yzdz$.

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم که انتگرال فوق مستقل از مسیر است چرا که داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}=2z\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}=0\end{cases}$$

بنابراین انتگرال فوق مستقل از مسیر است و یک راه حل مسئله محاسبه انتگرال روی مسیر خطی است که نقطه $(0,0,0)$ را به نقطه $(1,2,3)$ وصل می‌کند و راه حل دیگر استفاده از تابع پتانسیل است.

راه حل ۱ (محاسبه انتگرال روی مسیر خط):

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{3-0}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=t\Rightarrow dx=dt\\ y=2t\Rightarrow dy=2dt\\ z=3t\Rightarrow dz=3dt\end{cases}$$

$$I=\int_{t=0}^{1} 2t\,dt+\left(9t^2+4t\right).2dt+12t^2.3dt=\int_{t=0}^{1}\left(10t+54t^2\right)dt=23$$

راه حل ۲ (استفاده از تابع پتانسیل):

$$du(x,y,z)=2x\,dx+\left(z^2+2y\right)dy+2yz\,dz$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\Rightarrow u(x,y,z)=x^2\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=z^2+2y\Rightarrow u(x,y,z)=z^2y+y^2\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}=2yz\Rightarrow u(x,y,z)=yz^2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}u(x,y,z)=x^2+y^2+yz^2$$

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xdx+\left(z^2+2y\right)dy+2y\,zdz=\int_{(0,0,0)}^{(12,3)} du=x^2+y^2+yz^2\Big|_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}=23$$

مثال۳: میدان نیروی زیر را در نظر بگیرید:

$\vec{F}=\left(ax^2y+1\right)\vec{i}+\left(x^3+bye^{-z}\right)\vec{j}+\left(-y^2e^{-z}+z^2\right)\vec{k}$.

الف) اولین مقادیر a و b را طوری بیابید که این میدان نیرو پایستار باشد.

ب) کار این نیرو روی مسیری که نقطه $(1,2,1)$ را به نقطه $(0,1,0)$ وصل می‌کند بدست آورید.

حل: الف)

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} & \Rightarrow\quad ax^2=3x^2\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x} & \Rightarrow\quad 0=0\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y} & \Rightarrow\quad -bye^{-z}=-2ye^{-z}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad a=3;b=2$$

ب) برای یافتن کار داریم:

$$\vec{F}=\left(3x^2y+1\right)\vec{i}+\left(x^3+2ye^{-z}\right)\vec{j}+\left(-y^2e^{-z}+z^2\right)\vec{k}$$

پس باید تابع پتانسیل u را بیابیم:

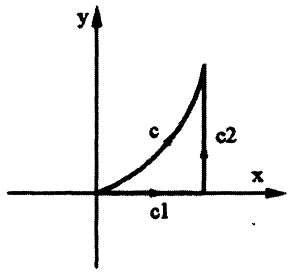
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y+1\Rightarrow u(x,y,z)=x^3y+x\\&\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+2ye^{-z}\Rightarrow u(x,y,z)=x^3y+y^2e^{-z}\\&\frac{\partial u}{\partial z}=-y^2e^{-z}+z^2\Rightarrow u(x,y,z)=y^2e^{-z}+\frac{z^3}{3}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}u(x,y,z)=x^3y+x+y^2e^{-z}+\frac{z^3}{3}+k$$

$$w=\int_{(1,2,-1)}^{(0,1,0)}\left(3x^2y+1\right)\vec{i}+\left(x^3+2ye^{-z}\right)\vec{j}+\left(-y^2e^{-z}+z^2\right)\vec{k}\Rightarrow w=\int_{(1,2,-1)}^{(0,1,0)}du=x^3y+x+y^2e^{-z}+\frac{z^3}{3}\Bigg|_{(1,2,-1)}^{(0,1,0)}=4e+\frac{5}{3}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه $\int_c\left(2x\sin y+e^xy^2\right)dx+\left(2e^xy+x^2\cos y\right)dy$ بر روی قسمتی از منحنی $y=x^2$ که از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2,4)$ پیموده شده است.

حل: با کمی دقت ملاحظه می‌شود، انتگرال مورد نظر مستقل از مسیر است زیرا: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos y+2ye^x$

بنابراین یک راه آن است که تابع پتانسیل مسئله را پیدا کرده و مانند مثال ۳ حل را ادامه دهیم و راه دیگر می‌تواند آن باشد که به محاسبه انتگرال مورد نظر بر روی مسیر c_1 و c_2 بپردازیم:



$$I=\int_{c_1}+\int_{c_2}$$

اما روی مسیر c_1 داریم:

$$y=0\Rightarrow dy=0;0\le x\le 2$$

و روی مسیر c_2 داریم:

$$x=2\Rightarrow dx=0;0\le y\le 4$$

پس داریم:

$$I=\int_{x=0}^{2}\left(2x.\sin\overset{0}{\cancel{0+e^x.0^2}}\right).dx+\left(2e^x.\overset{0}{\cancel{0+x^2}}\cos 0\right).0+\int_{y=0}^{4}\left(4\sin\overset{0}{\cancel{y+e^2y^2}}\right).0+\left(2ye^2+4\cos y\right)dy$$

$$=\int_{y=0}^{4}\left(2e^2y+4\cos y\right)dy=\left(e^2y^2+4\sin y\right)\Big|_0^4=4\sin 4+16e^2$$

مثال ۵: مقدار $\int_C e^ydx+xe^ydy$ بر روی نیم‌دایره $y=\sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

حل: مشخص است که انتگرال‌گیری روی مسیر $y=\sqrt{1-x^2}$ مشکل است ولی اگر کمی دقت کنیم به این نکته می‌رسیم که تابع زیر علامت انتگرال مستقل از مسیر است.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)=e^y &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=e^y \\ Q(x,y)=xe^y &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

بنابراین انتگرال فوق مستقل از مسیر است و بجای محاسبه آن روی منحنی c می‌توان روی منحنی c' کار کرد، روی پاره خط c' داریم: $dy=0$ و $y=0$ و لذا خواهیم داشت:

$$I=\int_{c'} e^y dx + xe^y dy = \int_{+1}^{-1} dx = -2$$

مثال ۶: کار نیروی $\vec{F}=(\sin y.\sinh x+\cos y.\cosh x)\vec{i}+(\cos y\cosh x-\sin y\sinh x)\vec{j}$ بر روی قسمتی از منحنی که نقطه $(1,0)$ را به نقطه $(2,\pi)$ وصل می‌کند را بدست آورید؟

حل:

$$\begin{cases} P(x,y)=\sin y.\sinh x+\cos y.\cosh x \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y\sinh x-\sin y\cosh x \\ Q(x,y)=\cos y.\cosh x-\sin y.\sinh x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos y\sinh x-\sin y.\cosh x \end{cases}$$

بنابراین انتگرال فوق مستقل از مسیر است و برای یافتن کار نیروی F باید تابع پتانسیل نیروی F را بدست بیاوریم.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x &= P(x,y)=\sin y.\sinh x+\cos y.\cosh x \Rightarrow \varphi=\sin y\cosh x+\cos y\sinh x \\ \varphi_y &= Q(x,y)=\cos y.\cosh x-\sin y.\sinh x \Rightarrow \varphi=\sin y.\cosh x+\cos y\sinh x \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}$$

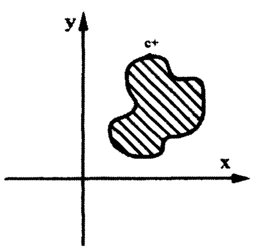
$$\varphi=\varphi(x,y)=\sin y.\cosh x+\cos y.\sinh x$$

$$w=\int_{(1,0)}^{(2,\pi)} d\varphi=\left[\sin y.\cosh x+\cos y.\sinh x\right]_{(1,0)}^{(2,\pi)}=-\sinh 2-\sinh 1$$

۲-۳) قضیه گرین در صفحه:

هرگاه توابع $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ در تمام ناحیه R که به منحنی بسته c محدود شده است، **توابع پیوسته** باشند آنگاه می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\oint_{c^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$



مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I=\int_c \left(e^{x^2}+3y\right)dx+\left(y^4-x\right)dy$ که در آن c محیط بیضی $4x^2+y^2=9$ است که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است.

حل: ابتدا $P(x,y),Q(x,y),\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$P=e^{x^2}+3y\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=3$$

$$Q=y^4-x\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

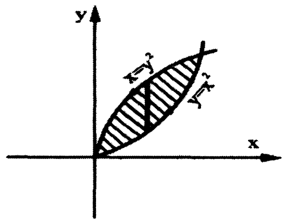
بدیهی است که استفاده از قضیه گرین مجاز می‌باشد و داریم:

$$I=\iint_{C^+}(-1-3)\,dx\,dy=-4A=-18\pi$$

$$\text{مساحت بیضی}=\pi\left(\frac{3}{2}\right)(3)$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه $I=\oint_c \left(x^2+3y\right)dx+\left(x^3-y^2\right)dy$ که در آن c ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=x^2$ و $x=y^2$ است.

حل: ابتدا ناحیه c را رسم می‌کنیم:



سپس $P(x,y),Q(x,y),\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}P=x^2+3y\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=3\\[2mm] Q=x^3-y^2\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2\end{cases}$$

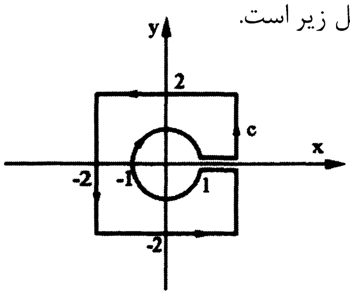
با توجه به پیوستگی توابع فوق در داخل ناحیه محصور به c می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد و نوشت:

$$I=+\iint_R\left(3x^2-3\right)dx\,dy=+\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\left(3x^2-3\right)dy\,dx=3\int_{x=0}^{1}\left[\left(x^2-1\right)y\right]_{y=x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=3\int_{x=0}^{1}\left(-x^4+x^2+x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=3\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{x=0}^{1}=-\frac{26}{35}$$

علامت مثبت قبل از انتگرال فوق بدین معنی است که مسیر c در جهت مثلثاتی طی شده است.

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\oint_c \left(3y-x^4\right)dx+\left(x+y^5\right)dy$ که در آن c مطابق شکل زیر است.



حل:

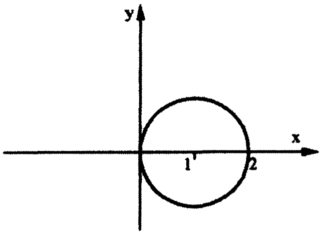
$$\begin{cases}P=3y-x^4\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=3\\[2mm] Q=x+y^5\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1\end{cases}$$

با توجه به پیوستگی توابع فوق در داخل ناحیه محصور به c می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد و نوشت:

$$I=+\iint_R(1-3)\,dx\,dy=-2(\text{مساحت ناحیه محدود به c})=-2\left(4\times4-\pi.(1)^2\right)=2\pi-32$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\oint_c y^3dx-x^3dy$ که در آن c مرز دایره $(x-1)^2+y^2=1$ است و یک بار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است؟

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} P=y^3 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=3y^2 \\ Q=-x^3 \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2 \end{cases}$$

چون مسیر c در جهت خلاف مثلثاتی طی شده است پس علامت پشت انتگرال منفی است.

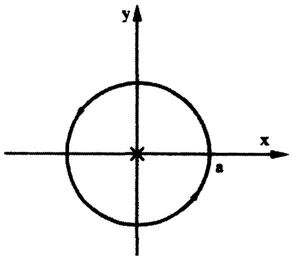
$$I=-\iint_R\left(-3x^2-3y^2\right)dx\,dy \xrightarrow[(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow x^2+y^2=2x\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=2\cos\theta]{\text{استفاده از مختصات قطبی}} I=-\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(-3r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}12\cos^4\theta\,d\theta=12\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta=3\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta=$$

$$3\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4\theta\right)d\theta=3\left[\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\pi$$

مثال ۵: مطلوب است محاسبه $I=\int_c\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ که در آن c مرز دایره $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد و در جهت مثلثاتی طی شده است؟

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} P=\dfrac{y}{x^2+y^2}\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که تابع P و Q در نقطه $(0,0)$ که در داخل ناحیه محصور شده به دایره $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد، پیوسته نمی‌باشند و اگر بخواهیم <u>**به غلط به قضیه گرین**</u> ارجاع دهیم از آنجا که $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$، حاصل انتگرال برابرصفر می‌شود لذا حل مسئله فوق به صورت زیر است:

روی مسیر $x^2+y^2=a^2$ به محاسبه انتگرال مورد نظر می‌پردازیم:

$$\begin{cases} x=a\cos\theta\Rightarrow dx=-a\sin\theta\,d\theta \\ y=a\sin\theta\Rightarrow dy=a\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$: با فرض

$$I=\int_c\frac{y\,dx-xdy}{x^2+y^2}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{(a\sin\theta)(-a\sin\theta\,d\theta)-(a\cos\theta)(a\cos\theta\,d\theta)}{a^2}$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{-\left(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta\right)}{a^2}d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}-d\theta=-2\pi\neq0$$

فصل ششم

انتگرال سطح

۱) انتگرال سطح نوع اول:

انتگرال سطح نوع اول به صورت زیر بیان می‌شود که در آن s سطح یک رویه مشخص و ds المان مساحت روی این سطح می‌باشد.

$$\boxed{\iint_s f(x,y,z)\,ds}$$

اگر سطح s سطحی منظم نسبت به محور zها باشد (یعنی هر خط به موازات محورzها آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند) که با معادله $s:z=P(x,y)$ توصیف شده است می‌توان نشان داد:

$$\boxed{I=\iint_D f\left(x,y,P(x,y)\right).\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}\;dx\,dy}_{ds}}$$

توجه: D تصویر سطح S روی صفحه xoy است.

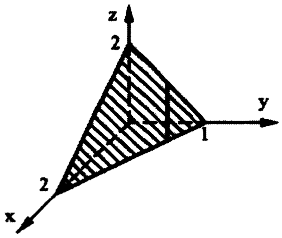
به عنوان ساده‌ترین کاربرد انتگرال‌های سطح نوع اول می‌توان گفت $\iint_s ds$ سطح را توصیف می‌کند. مثلاً اگر s سطحی منظم نسبت به محورyها باشد که با معادله $y=P(x,z)$ توصیف شده است، اندازه مساحت آن را می‌توان از رابطه زیر پیدا کرد.

$$\boxed{s=\iint_D \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2}\;dx\,dz}_{ds}}$$

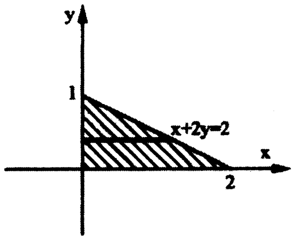
توجه: D تصویر سطح S روی صفحه xoz است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\iint_s (z-x)\,ds$ که در آن S قسمتی از صفحه $x+2y+z=2$ است که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات واقع شده است؟



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



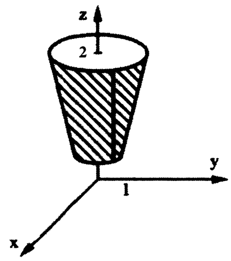
طبیعی است سطح مورد نظر نسبت به محور zها منظم است.

$$z=2-x-2y\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+(-1)^2+(-2)^2}\;dx\,dy$$

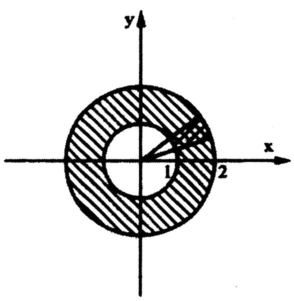
$$I=\iint_D (z-x)\,ds=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{2-2y}(2-x-2y-x).\sqrt{6}\,dx\,dy=\sqrt{6}\int_{y=0}^{1}\left[2x-x^2-2xy\right]\Big|_{x=0}^{2-2y}dy\Rightarrow$$

$$I=\sqrt{6}\int_{y=0}^{1}\left(4-4y-4+8y-4y^2-4y+4y^2\right)dy=0$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $I=\iint_s z\,ds$ که در آن s قسمتی از سطح مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که بین صفحات $z=2, z=1$ واقع شده است.



حل: ناحیه فوق را رسم می‌کنیم

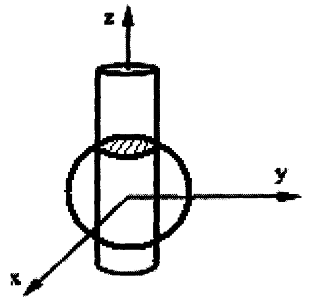


با توجه به منظم بودن سطح مورد نظر نسبت به محور zها می‌نویسیم:

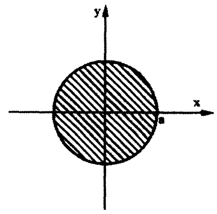
$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\;dx\,dy\Rightarrow ds=\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$I=\iint_s\sqrt{x^2+y^2}\;ds=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}r.\sqrt{2}.r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}.\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_1^2 d\theta=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$$

مثال ۳: مطلوب است مساحت قسمتی از نیمکره $x^2+y^2+z^2=1$ که توسط استوانه $x^2+y^2=a^2$ بریده شده است. $(a<1)$ (مساحت عرق چین کروی مذکور مورد نظر است).



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



بدیهی است که سطح مورد نظر نسبت به محور zها منظم است.

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Rightarrow\begin{cases} z_x=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ z_y=\dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$s=\iint_s ds=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}.r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\sqrt{\frac{1}{1-r^2}}.r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)d\theta=2\pi\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)$$

یادآوری:

$$\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr\xrightarrow[\substack{r=0\Rightarrow u=1\\ r=a\Rightarrow u=\sqrt{1-a^2}}]{\sqrt{1-r^2}=u\Rightarrow\frac{-r}{u}dr=du}\int_{u=1}^{\sqrt{1-a^2}}-du=1-\sqrt{1-a^2}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $I=\iint_s x^2\,ds$ که در آن s بخشی از مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ است که بین صفحات $x=0$ و $x=1$ قرار دارد.

حل: بدیهی است که ناحیه فوق نسبت به محور x منظم است.

$$x=\sqrt{y^2+z^2}\Rightarrow\begin{cases} x_y=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ x_z=\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}}=\sqrt{2}\,dydz$$

$$I=\iint_s x^2\,ds=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\sqrt{2}.r^2.r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}r^3\,dr\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[r^4\right]\Big|_0^1 d\theta=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۵: مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $I=\iint_s\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)ds$ که در آن s بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که توسط استوانه $x^2+y^2=2x$ جدا شده است.

حل:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases} z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2=r^2;x^2+y^2=2x\Rightarrow r=2\cos\theta;z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$I=\iint_s\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)ds=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(x^2y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\left(x^2+y^2\right)\right).\sqrt{2}.r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^4\right)r\sqrt{2}\,dr\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\cos\theta}r^5.\left(\sin^2\theta.\cos^2\theta+1\right)dr d\theta=\sqrt{2}.\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta+1\right).\left(\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^6\theta\left(\sin^2\theta\cos^2\theta+1\right)d\theta$$

$$=\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\cos^6\theta+\cos^8\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\right)d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\cos^6\theta+\cos^8\theta-\cos^{10}\theta\right)d\theta=\frac{29\sqrt{2}}{4}\pi$$

یادآوری:

انتگرال فوق طبق رابطه بازگشتی زیر حل می‌شود:

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x.\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

۲) انتگرال سطح نوع دوم:

میدان برداری $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ را در نظر بگیرید، چنانچه s سطح یک رویه فضایی بوده و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر این سطح باشد شار میدان بردار F گذرنده از سطح s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\Phi=\iint_s\vec{F}.\vec{n}\,ds}$$

توجه کنید تکلیف المان ds را قبلاً مشخص کرده‌ایم (در انتگرال‌های سطح نوع اول) و چنانچه سطح s با معادله‌ای مانند $H(x,y,z)=0$ تعریف شده باشد، بدیهی است با توجه به کاربرد گرادیان داریم:

$$\boxed{\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}_H}{\left|\vec{\nabla}_H\right|}}$$

و بعد می‌توان مسئله را ادامه داد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: چنانچه S نیمکره $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ باشد شار میدان برداری $F=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ گذرنده از سطح S را به‌دست آورید؟

حل:

$$N=-z_x\vec{i}-z_y\vec{j}+\vec{k},\ \vec{n}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|};|\vec{N}|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$$

$$\vec{N}=\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}\vec{j}+\vec{k}$$

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds=\iint_A(\vec{F}.\vec{n}).|\vec{N}|dA=\iint_A\left(\vec{F}.\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\right).|\vec{N}|dA=\iint_A\vec{F}.\vec{N}dA=\iint_A(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).\left[\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\vec{k}\right]dA$$

$$=\iint_A\left[\frac{x^2+y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+z\right]dA=9\iint_A\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dA=9\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}dr\,d\theta=9\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}.\Big[-\sqrt{9-r^2}\Big]_0^3=54\pi$$

مثال ۲: چنانچه s بخشی از سهمی گون هذلولی $z=xy$ که بالای ناحیه مستطیلی $0\le x\le 3;0\le y\le 2$ باشد شار میدان برداری $\vec{F}=\vec{i}-y^2\vec{j}-z\vec{k}$ گذرنده از سطح s را بیابید؟

حل:

$$x,y\ge 0\ ;z=xy$$

$$z=xy\Rightarrow z_x=y;z_y=x\Rightarrow\vec{N}=-z_x\ \vec{i}-z_y\ \vec{j}+\vec{k}=-y\,\vec{i}-x\vec{j}+\vec{k}$$

$$\iint_s\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_A(\vec{F}.\vec{n})|\vec{N}|dA=\iint\vec{F}.\vec{N}\,dA=\iint_A\vec{F}.\vec{N}\,dA=\iint_A(-y+y^2x-z)dA=\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2}(-y+y^2x-xy)dy\,dx=$$

$$\int_{x=0}^{3}\left[-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3x}{3}-\frac{y^2x}{2}\right]_0^2dx=\int_{x=0}^{3}\left[-2+\frac{8x}{3}-2x\right]dx=-3$$

۲ـ۱) قضیه دیورژانس (قضیه واگرایی یا گاوس):

فرض کنید s یک سطح بسته باشد که حجم v را در خود محدود کرده است و میدان برداری $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ و دیورژانس F در تمام حجم v توابعی پیوسته باشد می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\oiint_s\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_v(\vec{\nabla}.\vec{F})dv}$$

فرمول استروگرادسکی:

$$\boxed{\oiint_s P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dx\,dy=\iiint_v(\vec{\nabla}.\vec{F})dv}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I=\oiint_s (y^2+z)dy\,dz+(x^3-y)dx\,dz+(2z+xy)dx\,dy$ که در آن s سطح بیضی گون $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ می‌باشد.

حل: از شکل مسئله پیداست که باید به فرمول استروگرادسکی مراجعه کنیم.

$$F=(y^2+z)\vec{i}+(x^3-y)\vec{j}+(2z+xy)\vec{k}\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(y^2+z)+\frac{\partial}{\partial y}(x^3-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z+yx)=-1+2=1$$

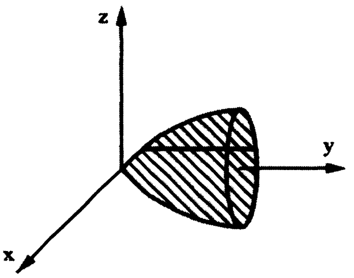
$$\xrightarrow{\text{طبق فرمول}} I=\iiint_v(1)dv=\text{حجم بیضی گون}=\frac{4}{3}\pi(1).(2).(3)=8\pi$$

یادآوری:

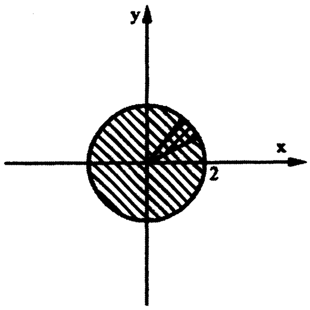
حجم بیضی گون به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\Rightarrow \text{حجم}=\frac{4}{3}\pi abc$$

مثال ۲: شار میدان برداری $F=xz^2\vec{i}+(z+1)\vec{j}+(x^2z+y^3)\vec{k}$ گذرنده از سطح بسته محدود شده به سهموی $y=x^2+z^2$ و صفحه $y=4$ را بدست آورید؟



حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:

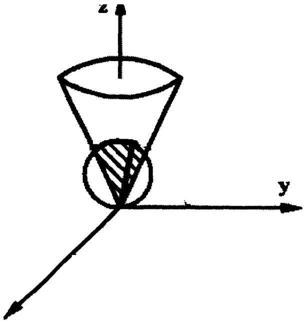


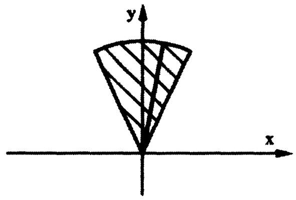
$$\Phi=\oiint \vec{F}.\vec{n}\,ds\xrightarrow{\text{قضیه دیورژانس}}\iiint_v(\vec{\nabla}.\vec{F})dV=\iiint_v(z^2+0+x^2)dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{y=r^2}^{4}r^2.r\,dy\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}r^3y\Big|_{r^2}^{4}dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(4r^3-r^5)dr\,d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}.\left(r^4-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{3}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه $I=\oiint_s \vec{F}.\vec{n}\,ds$ که در آن s سطح محدود شده به کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ می باشد که در داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ واقع است. $\vec{F}=(x^3,y^3,z^3)$ و $\vec{n}$ بردار یکه عمود رو به خارج سطح s در هر نقطه از آن است.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:





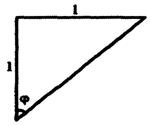
با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$I=\iiint_v (3x^2+3y^2+3z^2)\,dv \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} I=3\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\cos\varphi}(r^2).r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

یادآوری:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=2z\Rightarrow r^2=2r\cos\varphi\Rightarrow r=2\cos\varphi$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$$\Rightarrow:\ tg\varphi=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$=3\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\cos\varphi}.\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi=\frac{3}{5}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{2\pi}32\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow 3\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}(2\pi)\left(\frac{32}{5}\right)(\cos^5\varphi)(\sin\varphi\,d\varphi)=\frac{192\pi}{5}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{28\pi}{5}$$

مثال ۴: فرض کنید s سطح بسته‌ای در فضا باشد که حجم v را در خود محصور کرده است و $f(x,y,z)$ تابعی همساز (هارمونیک) باشد که مشتق سویی آن را در جهت بردار یکه سطح s با $\frac{d\vec{f}}{d\vec{n}}$ نمایش داده‌ایم مطلوب است محاسبه $\oiint_s \frac{d\vec{f}}{d\vec{n}}.ds$ ؟

حل:

$$I=\oiint_s \frac{d\vec{f}}{d\vec{n}}ds \xrightarrow{\text{تعریف مشتق سویی}} \oiint_s(\vec{\nabla}f.\vec{n}) \xrightarrow{\text{قضیه دیورژانس}} \iiint(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}f)\,dv\ \varphi$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لاپلاسین}} \iiint \nabla^2 f\,dv \xrightarrow[\nabla^2 f=0]{\text{چون f تابعی همساز است}} =0$$

مثال ۵: درستی قضیه دیورژانس را برای سطح $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ را تحقیق کنید.

حل:

$$\vec{F}=\overrightarrow{xi}+\overrightarrow{yj}+\overrightarrow{zk}\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$$

بنابراین داریم:

$$\iiint_v \operatorname{div}\vec{F}\,dv=\iiint_v 3dv=3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)=4\pi a^3$$

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2 \Rightarrow \vec{\nabla}_g=2\left(\overrightarrow{xi}+\overrightarrow{yi}+\overrightarrow{zk}\right);\left|\vec{\nabla}_g\right|=\sqrt{4\left(x^2+y^2+z^2\right)}=2a$$

$$n=\frac{\vec{\nabla}_g}{\left|\vec{\nabla}_g\right|}=\frac{\overrightarrow{xi}+\overrightarrow{yi}+\overrightarrow{zk}}{a}$$

$$\vec{F}.\vec{n}ds=\frac{x^2+y^2+z^2}{a}ds \xrightarrow{\text{روی سطح کره}} \frac{a^2}{a}ds=ads$$

$$\oiint_s \vec{F}.\vec{n}ds=\oiint_s ads=a.\left(4\pi a^2\right)=4\pi a^3$$

مثال ۶: به کمک قضیه دیورژانس، شارمیدان داده شده $F=-y^2i+x^2j+z^3k$ خارج از کره $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید؟

حل:

$$\Phi=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V +3z^2dv=3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1}\left(r^2\cos^2\varphi\right)\cdot r^2\sin\varphi dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi.\cos^2\varphi.\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{1}d\varphi d\theta=\frac{3}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi.\cos^2\varphi d\varphi d\theta$$

$$=\frac{3}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\pi}d\theta=\frac{2}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta=\frac{4\pi}{5}$$

۲ـ۲) قضیه استوکس:

فرض کنید s سطح رویه منظم گذرنده از منحنی بسته c باشد و $\vec{n}$ بردار یکه عمود به سمت خارج سطح s در هر نقطه از آن فرض شود چنانچه میدان برداری $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ و $\operatorname{curl}\vec{F}$ در تمام سطح s توابعی پیوسته باشند، آنگاه می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\oint_{c^+}\vec{F}.d\vec{r}=\oint_{c^+}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oiint_s\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right).\vec{n}ds}$$

مهم: جهت مثبت بر روی منحنی بسته **c** با توجه به قاعده دست راست مشخص می‌شود، بدین ترتیب که اگر شصت دست راست در جهت بردار $\vec{n}$ قرار گیرد جهت بسته شدن انگشتان دست راست، جهت مثبت بر روی منحنی **c** را معرفی می‌کند.

مسائل حل شده :

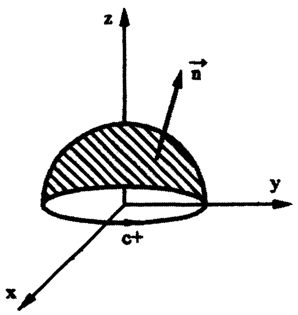
مثـال ۱: مطلـوب اسـت محاسـبه $I=\oint_c (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ کـه در آن **c** منحنـی بسـته حاصـل از تقـاطع کـره $x^2+y^2+z^2=1$ و صفحه $x+2y+3z=0$ می‌باشد.

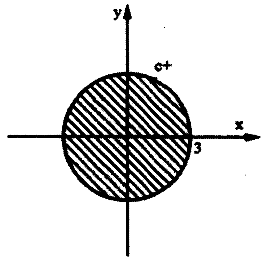
حل: ابتدا کرل تابع $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}=(y+z;x+z;x+y)$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}=\vec{0i}+\vec{0j}+\vec{0k}=\vec{0}\xrightarrow{\text{طبق قضیه استوکس}} I=\iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}\,ds=0$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه $I=\iint_s \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}\,ds$ که در آن **s** سطح نیمکره $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ می‌باشد و $\vec{n}$ بـردار یکـه عمـود بـه سمت خارج این سطح بوده و $F=(x^3+2y)\vec{i}+(z^2-x)\vec{j}+(xz+y^2)\vec{k}$ می‌باشد.





حل: بدیهی است کرل تابع **F** مخالف صفر است. (امتحان کنید)

ناحیه **z** نیز به صورت زیر است:

اگر روی منحنی c حرکت کنیم خواهیم داشت:

$$z=0\Rightarrow dz=0$$

$$I=\oint_{c^+}\vec{F}.d\vec{r}=\oint_{c^+}(x^3+2y)dx+(z^2-x)dy+(xz+y^2)dz\xrightarrow{z=0;dz=0}I=\oint_{c^+}(x^3+2y)dx-x\,dy\xrightarrow{\text{قضیه گرین}}$$

$$I=\iint_R(-1-2)dx\,dy=-3\underset{\substack{\downarrow\\ \text{مساحت دایره}=\pi(3)^2}}{A}=-27\pi$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه $I=\oint_c \vec{F}.d\vec{R}$ که در آن **c** مرز دایره $x^2+y^2=a^2$ واقع درصفحه xoy و در خلاف جهت عقربـه‌هـای ساعت است و $\vec{F}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$ است.

حل:

$$\vec{F}.d\vec{R}=(x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}).(dx\,\vec{i}+dy\vec{j}+dz\,\vec{k})=(x^2y^3dx+dy+zd\,z)$$

$$xoy\ \text{صفحه}\ \Rightarrow z=0;dz=0$$

$$\oint_c\vec{F}.d\vec{R}=\oint_C(x^2y^3\,dx+dy)\xrightarrow{\text{قضیه گرین}}\oint\vec{F}.d\vec{R}=\iint_R(-3x^2y^2)dxdy\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}$$

$$\oint_c\vec{F}.d\vec{R}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}(-3.r^2\cos^2\theta.r^2\sin^2\theta)r\,dr\,d\theta=-3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}r^5\sin^2\theta\cos^2\theta drd\theta=-\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta.\left[r^6\right]_0^a d\theta$$

$$=-\frac{a^6}{8}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta=-\frac{a^6}{16}\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-\cos4\theta)\,d\theta=-\frac{a^6}{16}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\pi a^6}{8}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه $I=\oint_c \vec{F}.d\vec{R}$ که در آن **c** مرز مثلثی است که صفحه $x+y+z=1$ را از یک هشتم اول در خلاف جهت عقربه‌های ساعت جدا می‌کند که در آن $F=\left(y^2+z^2\right)\vec{i}+\left(x^2+z^2\right)\vec{j}+\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$ می‌باشد.

$$\text{curL}\,\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(y^2+z^2\right) & \left(x^2+z^2\right) & \left(x^2+y^2\right) \end{vmatrix}=(2y-2z)\vec{i}+(2z-2x)\vec{j}+(2x-2y)\vec{k}$$

$$G: x+y+z-1=0 \Rightarrow \vec{\nabla}G=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\ ; \left|\vec{\nabla}G\right|=\sqrt{3}$$

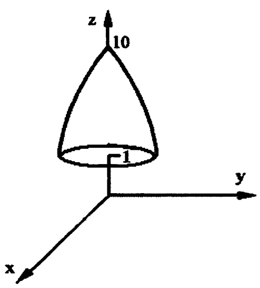
$$n=\frac{\vec{\nabla}G}{\left|\vec{\nabla}G\right|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$$ds=\frac{\left|\vec{\nabla}G\right|}{\left|\vec{\nabla}G.\vec{k}\right|}dA=\frac{\sqrt{3}}{1}dA$$

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{R}=\iint_s \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right).\vec{n}.ds=\iint_A (2y-2z+2z-2x+2x-2y).\sqrt{3}.dA=0$$

مثال ۵: درستی فرمول استوکس را برای $F(x,y,z)=-4y\vec{i}+2z\vec{j}+3x\vec{k}$ و سطح Δ مرز حجم محصور بین سطوح $z=1$ و $z=10-x^2-y^2$ محاسبه کنید؟

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$z=1 \Rightarrow x^2+y^2=9 \xrightarrow{\text{معادلات پارامتری}} x=3\cos t\ ;\ y=3\sin t\ ; z=1\ ; 0\le t\le 2\pi$$

$$r(t)=3\cos t\,\vec{i}+3\sin t\,\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow r'(t)=-3\sin t\,\vec{i}+3\cos t\,\vec{j}$$

$$F\left(r(t)\right)=-12\sin t\,\vec{i}+2\vec{j}+9\cos t\,\vec{k}$$

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{r}=\int_{t=0}^{2\pi}\left(-12\sin t\,\vec{i}+2\vec{j}+9\cos t\,\vec{k}\right).\left(-3\sin t\,\vec{i}+3\cos t\,\vec{j}\right)dt=\int_{t=0}^{2\pi}\left(36\sin^2 t+6\cos t\right)dt$$

$$=36\int_{t=0}^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+6\int_{t=0}^{2\pi}\cos t\,dt=36\pi$$

$$\text{curL}\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -4y & 2z & 3x \end{vmatrix}=-2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$$

روی سطح $\begin{cases} z=10-x^2-y^2 \\ z=1 \end{cases}$ داریم:

$$ds=dx\,dy\ ,\ \vec{n}=\vec{k}$$

$$\oiint_s \text{curL}\,\vec{F}.\vec{n}ds=\oiint_s 4\,dx\,dy=4\ (x^2+y^2=9 \ \text{مساحت دایره})=4(9\pi)=36\pi$$