دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

خلاصه درس ریاضیات عمومی ۱

(بر مبنای کتاب گاج)

تهیه و تنظیم : مصطفی رحیمی

E-MAIL: nce.rahimi@yahoo.com

بهار سال ۱۳۹۴

مقدمه :

خلاصه ای که پیش روی شماست، خلاصه درس ریاضیات عمومی ۱ بر مبنای کتاب انتشارات گاج چاپ ۱۳۹۲ می باشد.

بنده بر این باور هستم که درس ریاضیات، باید به صورت مبحثی خوانده شود. یعنی فصولی که بیشترین تعداد تست را در کنکور دارند، باید توجه بیشتری داده شود. لذا بنده خلاصه فصولی که در کنکور کارشناسی ارشد بیشترین تست را داشته اند را در جزوه آورده ام.

لازم به ذکر است که این خلاصه برای یادگیری هر چه بیشتر، همراه با شماری از مثال های متنوع تدوین شده است.

امید است که مورد رضایت مهندسین عزیز واقع شود ...

در مورد نحوه ی خواندن درس ریاضیات عمومی ۱ و توضیح بیشتر در مورد این درس، پی دی افی آماده گردیده که پیشنهاد می شود قبل از مطالعه این درس آن پی دی اف نیز مطالعه شود.

لطفا هرگونه انتقاد و پیشنهاد در مورد این جزوه را از طریق ایمیل **nce.rahimi@yahoo.com** با بنده در میان بگذارید.

به امید موفقیت شما مهندسین عزیز در کنکور کارشناسی ارشد

مصطفی رحیمی

رتبه ۳۴ کنکور کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران سال ۱۳۹۴

تاریخ / /
موضوع ....

Mostafa Rahimi

<< ریاضیات عمومی >> پیش کنکوری

بسط دوجمله‌ای نیوتن:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

گردان $\rightarrow$ $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}\,a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}$$

$\leftarrow$ یعنی k تا عدد صحیح میذاریم که جمعشون بشه n

***مثلثات (مهم):

برای به دست آوردن نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{k\pi}{2}\pm\theta$ برحسب نسبت های مثلثاتی θ، اگر k زوج باشد، نسبت را تغییر نمی دهیم. اما اگر k فرد باشد Sin و Cos را به یکدیگر و tg و cotg را نیز به یکدیگر تبدیل می کنیم.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

نسبت های مثلثاتی $a\pm b$:

1) $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$

2) $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$

3) $tg(a\pm b)=\dfrac{tg\,a\pm tg\,b}{1\mp tg\,a\,tg\,b}$

4) $cotg(a\pm b)=\dfrac{cotg\,a\cdot cotg\,b\mp1}{cotg\,b\pm cotg\,a}$

$$\cos a+\sin a=\sqrt2\sin(\pi/4+a)=\sqrt2\cos(\pi/4-a)$$

$$\cos a-\sin a=\sqrt2\sin(\pi/4-a)=\sqrt2\cos(\pi/4+a)$$

$$tg(\pi/4+a)=\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}$$

تاریخ / /

موضوع ....

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

نسبت های مثلثاتی 3a :

1) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

2) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

3) $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$

4) $\operatorname{Cotg} 3a = \dfrac{3\operatorname{Cotg} a - \operatorname{Cotg}^3 a}{1 - 3\operatorname{Cotg}^2 a}$

تبدیل جمع به ضرب :

1) $\sin a + \sin b = 2\sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

2) $\sin a - \sin b = 2\sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$

3) $\cos a + \cos b = 2\cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

4) $\cos a - \cos b = -2\sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$

ضرب به جمع :

1) $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

2) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

3) $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

تاریخ / /
موضوع ....

دانستنی ها:

1) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

2) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

3) $tg x = tg\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

4) $ctg x = ctg\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

ترکیب توابع:

اگر ترکیب دو تابع fog را داشته باشیم:

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g , g(x) \in D_f\}$$

تابع زوج و فرد:

تابع f را فرد گوییم $\longleftarrow$ $f(-x) = -f(x)$

تابع f را زوج گوییم $\longleftarrow$ $f(-x) = f(x)$

** حاصلضرب و تقسیم چند تابع زوج و فرد به تعداد توابع فرد بستگی دارد. اگر تعداد آن ها فرد باشد، تابع حاصل فرد است و در غیر این صورت، زوج است.

** مجموع توابع زوج، زوج و مجموع توابع فرد، فرد است و مجموع یک تابع زوج با فرد (غیر از $f(x)=0$) تابعی نه زوج و نه فرد است.

***

تابع صعودی $\longrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

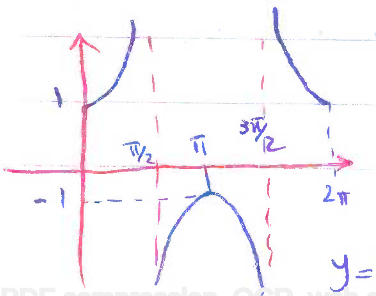
تابع نزولی $\longrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

تابع اکیداً صعودی $\longrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

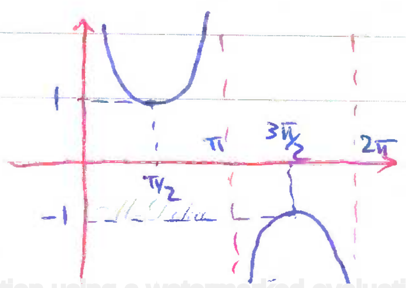
تابع اکیداً نزولی $\longrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

** اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، می‌توان آن را طرفین یک نامساوی اعمال کرد به طوری که اگر f اکیداً صعودی باشد جهت نامساوی عوض نمی‌شود و اگر f اکیداً نزولی باشد جهت برعکس می‌شود.

نمودار مهم:



$y = \sec x$



$y = \csc x$

*** تابع یک به یک:

تابع f را یک به یک گویند، هرگاه به ازای هر y، حداکثر یک x داشته باشد یعنی

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

*** هر خط افقی $y=k$ نمودار تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

*** هر تابع پیوسته و یک به یک اکیداً یکنواست و هر تابع اکیداً یکنوا یک به یک است.

*** تابع معکوس (وارون):

اگر تابع f یک به یک باشد تابع منحصر به فرد g وجود دارد به طوری که:

$$f\circ g(x)=x \ , \ g\circ f(x)=x$$

تابع g را معکوس f نامیم.

اگر f یک به یک نباشد تابع وارون ندارد.

*** تابع متناوب:

f را متناوب گویند هرگاه عدد مثبتی مانند C وجود داشته باشد

$$\forall x\in D_f \Rightarrow (x\pm c)\in D_f \ , \ f(x\pm c)=f(x)$$

به کوچکترین مقدار C دوره تناوب اصلی گویند.

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{2n} ax\\ \cos^{2n} ax\\ \tan^{n} ax\\ \cot^{n} ax\end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|} \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{2n-1} ax\\ \cos^{2n-1} ax\end{array}\right\} \longrightarrow T=\frac{2\pi}{|a|} \quad n\in\mathbb{N}$$

$$y=nx-[nx] \longrightarrow T=\frac{1}{|n|} \quad n\in\mathbb{R}$$

نکته: تابع ثابت متناوب است و هر عدد حقیقی دوره تناوب آن است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

نکته ۲: اگر توابع f و g متناوب با دوره تناوب T_1 و T_2 باشند آنگاه $f\pm g$ متناوب‌اند مشروط بر اینکه $\frac{T_1}{T_2}$ عددی گویا باشد در این صورت ک.م.م T_1 و T_2 دوره تناوب $f\pm g$ است.

تاریخ / /
موضوع ....

تابع جزء صحیح :

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی عدد حقیقی x را الف x یا جزء صحیح x نامیده

$x=[x]+\{x\}\ ;\ [x]=n\in\mathbb{Z}$ $\qquad \{x\}\in[0,1)$

$\{x\}$ را جزء اعشاری x نامیده و با p نمایش می‌دهند. $\qquad x=n+p$

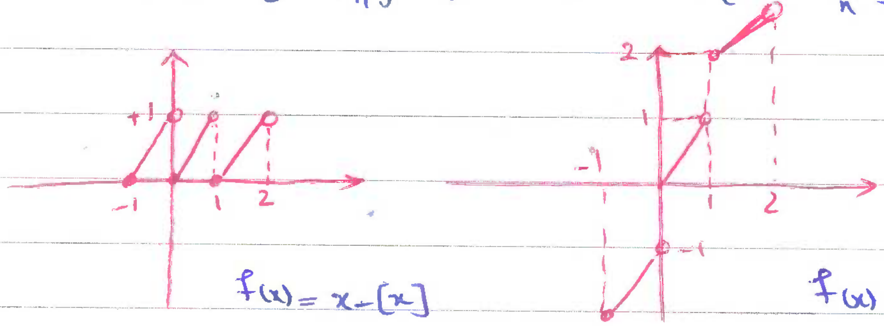
نکات:

1) $0\leq x-[x]<1$ $\qquad$ 2) $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -1-[x] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$[nx]=[x]+[x+1/n]+[x+2/n]+\dots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right] \qquad n\in\mathbb{N}$$

نمودار مهم:



$f(x)=x-[x]$ $\qquad\qquad$ $f(x)=x+[x]$

محدوده توابع مثلثاتی:

اکیداً صعودی فرد
$$-\pi/2\leq \mathrm{Arc\,Sin}\,x\leq\pi/2$$
$$-\pi/2<\mathrm{Arc\,tg}\,x<\pi/2$$

اکیداً نزولی ← نه زوج نه فرد
$$0\leq \mathrm{Arc\,Cos}\,x\leq\pi$$
$$0<\mathrm{Arc\,Cotg}\,x<\pi$$

$\mathrm{Arc\,Cos}(-x)=\pi-\mathrm{Arc\,Cos}\,x$ $\qquad$ $\mathrm{Arc\,cotg}(-x)=\pi-\mathrm{Arc\,Cotg}\,x$

نکته تستی:

$$\boxed{\mathrm{Arc\,tg}\,x+\mathrm{Arc\,tg}\,y=\mathrm{Arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}+k\pi}$$

$xy<1 \longrightarrow k=0$

$x>0,\ xy>1\longrightarrow k=1$

$x<0,\ xy>1\longrightarrow k=-1$

تاریخ / /
موضوع ....

$\mathrm{Sin}(\mathrm{Arc\,Cos}\,x) = \sqrt{1-x^2}$ $|x| \leq 1$

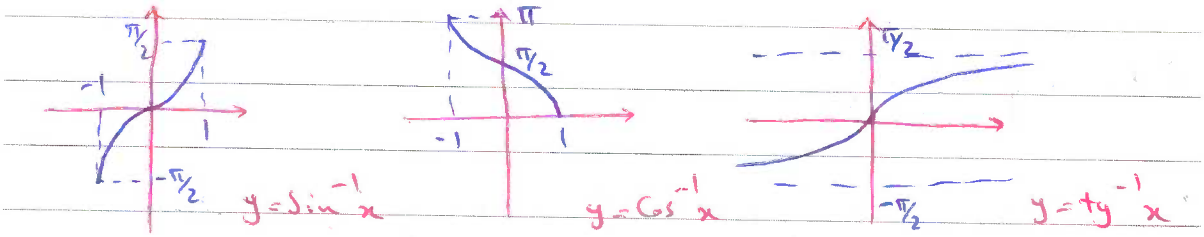
$\mathrm{Cos}(\mathrm{Arc\,Sin}\,x) = \sqrt{1-x^2}$ $|x| \leq 1$

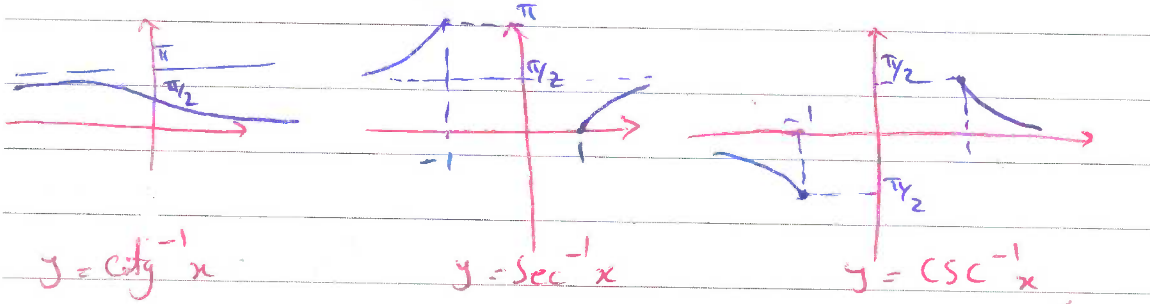
$\mathrm{tg}(\mathrm{Arc\,cotg}\,x) = 1/x$ $x \neq 0$

$\mathrm{Cotg}(\mathrm{Arctg}\,x) = 1/x$ $x \neq 0$

** اگر نمودار توابع f و f^{-1} متقاطع باشند نقاط تقاطع آن دو روی خطوط $y=\pm 1$ است

نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.



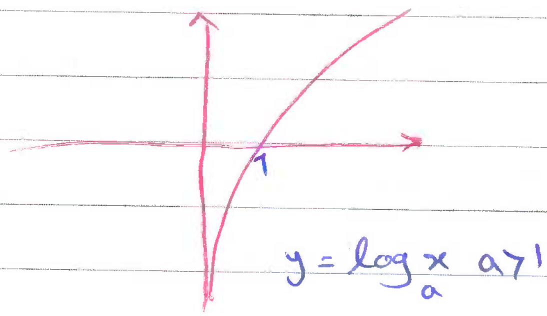


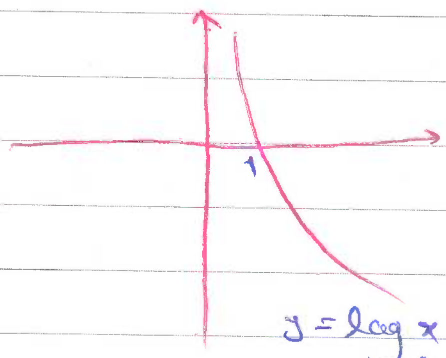
توابع نمایی ولگاریتمی :

توابع نمایی یک به یک و پوشا هستند

وارون → $f^{-1}(x) = \log_a x$

$y = a^x \longrightarrow x = \log_a y$ $0 < a \neq 1$





$y = \log_a x$

$0 < a < 1$

M-Doka

تاریخ / /
موضوع ....

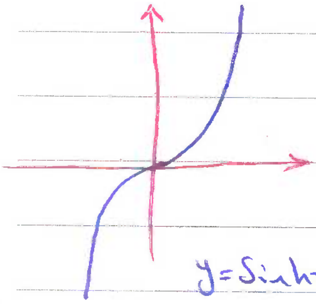
$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ $\qquad$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \Rightarrow \boxed{a^{\log_a b} = b}$

** توابع هیپربولیک :

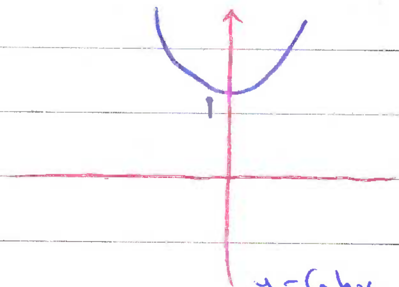
1) $\sinh x = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ 2) $\cosh x = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3) $\operatorname{tgh} x = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ 4) $\operatorname{Cothg} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

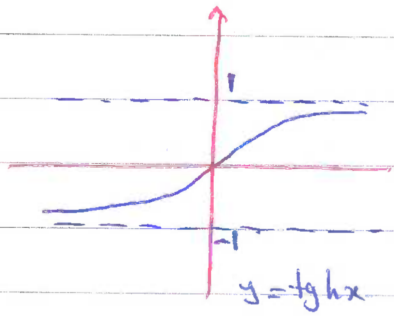
5) $\operatorname{Sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ 6) $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



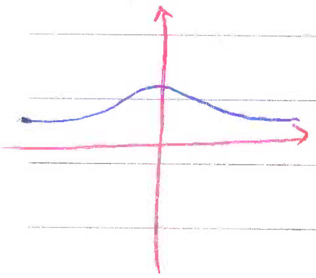
$y = \sinh x$



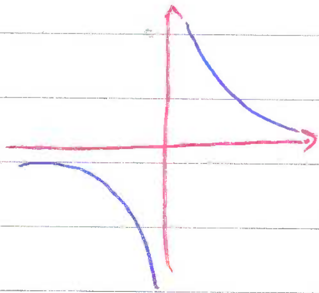
$y = \operatorname{Ch} x$



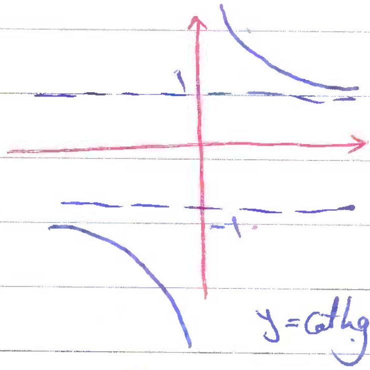
$y = \operatorname{tgh} x$



$y = \operatorname{Sech} x$



$y = \operatorname{CSch} x$



$y = \operatorname{Cothg} x$

روابط مهم :

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\qquad$ 2) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{Sech}^2 x$

3) $\operatorname{Cotg}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ $\qquad$ 4) $\cosh x + \sinh x = e^x$

5) $\operatorname{Ch} 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$

6) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ $\longleftarrow$ $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تاریخ / /
موضوع ....

توابع $\sinh x$ و $\tanh x$ توابعی فرد و اکیداً صعودی ولذا وارون پذیرند.

توابع $\coth x$ و $\operatorname{csch} x$ توابعی فرد و غیریکنوا اما وارون پذیرند.

توابع $\cosh x$ و $\operatorname{sech} x$ توابع زوج و غیریکنوا و وارون ناپذیرند. اگر فرض کنیم $x \geq 0$ این توابع نیز معکوس پذیر خواهند شد.

1) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$

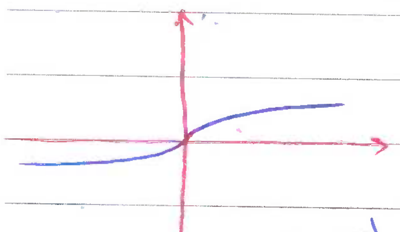
3) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

4) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \tanh^{-1} \frac{1}{x}, \quad |x| > 1$

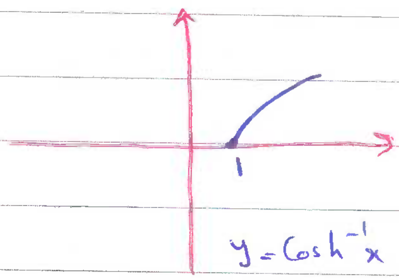
5) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \cosh^{-1} \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

6) $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right) = \sinh^{-1} \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

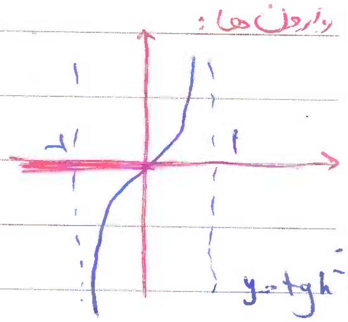
وارون ها:



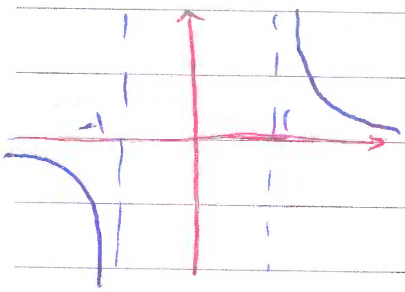
$y = \sinh^{-1} x$



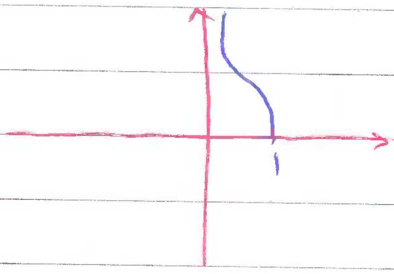
$y = \cosh^{-1} x$



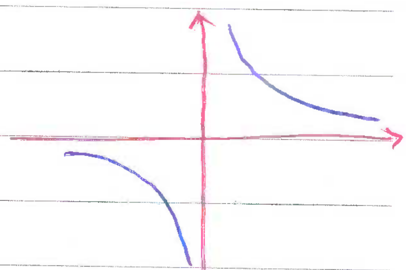
$y = \tanh^{-1} x$



$y = \coth^{-1} x$



$y = \operatorname{sech}^{-1} x$



$y = \operatorname{csch}^{-1} x$

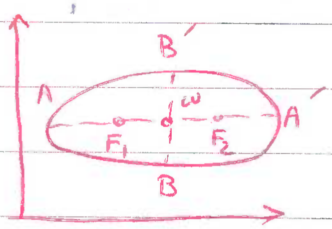
تابع علامت $\longrightarrow$ $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Al-Doka

Mostafa Rahimi

مقاطع مخروطی:

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 (کانون‌ها) برابر مقداری ثابت (طول قطر بزرگ بیضی و مساوی $2a$) است.



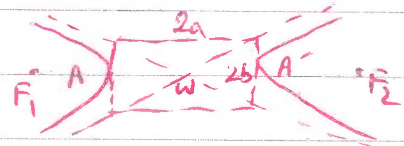
بیضی افقی $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \\ c^2+b^2=a^2 \end{cases}$

$\boxed{F_1F_2=2c}$

بیضی قائم $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \\ c^2+a^2=b^2 \end{cases}$

مساحت بیضی $\Rightarrow \boxed{S=\pi ab}$

هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آن ها از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 برابر مقدار ثابت $2a$ است.



$\omega=(\alpha,\beta)$

هذلولی افقی $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$

$F_1F_2=2c$

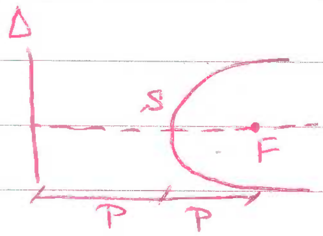
هذلولی قائم $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1 \end{cases}$

معادله‌ی هذلولی را می‌توان به صورت $\left(\dfrac{x-\alpha}{a}+\dfrac{y-\beta}{b}\right)\left(\dfrac{x-\alpha}{a}-\dfrac{y-\beta}{b}\right)=1$ نوشت که اگر هریک از پرانتز ها را برابر صفر قرار دهیم مجانب های هذلولی بدست می آید.

تاریخ / /
موضوع ....

سهمی:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از یک خط ثابت Δ (به نام خط هادی) و یک نقطه ثابت F (به نام کانون) برابر است، سهمی نامیده می‌شود.



$S(\alpha, \beta)$

سهمی افقی $\Rightarrow (y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$

سهمی قائم $\Rightarrow (x-\alpha)^2 = \pm 4p(y-\beta)$

مثبت ← تقعر به سمت بالا

منفی ← تقعر به سمت پایین

نکته: معادله $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ را در نظر بگیرید:

$ab=0$	سهمی، یک خط، دو خط	
$ab<0$	هذلولی، دو خط متقاطع	
$ab>0$	بیضی، دایره، نقطه، تهی	

نکته: اگر مقطع مخروطی دوران یابد و افقی و یا قائم نباشد، در معادله آن جمله xy ظاهر می‌شود و معادله‌ای به صورت $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ به وجود می‌آید. برای تشخیص از $\Delta = b^2-4ac$ استفاده می‌کنیم.

بیضی ← $\Delta<0$

هذلولی ← $\Delta>0$

سهمی ← $\Delta=0$

برای تبدیل به فرم استاندارد ← تغییر متغیر ←

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

که در آن اگر $a=c$ آنگاه $\alpha=\frac{\pi}{4}$ و اگر $a\neq c$ آنگاه $\alpha = \frac{1}{2}\, tg^{-1}\left(\frac{b}{a-c}\right)$

M-Doka

تاریخ / /
موضوع ....

فصل دوم: حد، پیوستگی، مجانب

** به ازای هر $\delta>0$ بازه $[a-\delta, a]$ را یک همسایگی چپ a و بازه $(a-\delta, a)$ را یک همسایگی محذوف چپ a می‌نامند.

تعریف حد:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \ni (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon)$$

اگر $a \notin Z$ آنگاه $\lim_{x\to a}[x]=[a]$ و اگر $m\in Z$ آنگاه:

$$\lim_{x\to m^+}[x]=m \quad , \quad \lim_{x\to m^-}[x]=m-1$$

$$\lim_{x\to a} tgx = tga \ ; \ (a\neq k\pi+\pi/2) \qquad \lim_{x\to a} cotgx = cotga \ (a\neq k\pi)$$

تابع $f: A\to B$ را روی A کراندار گویند هرگاه به ازای عددی مانند $K>0$ و به ازای هر x روی A داشته باشیم $|f(x)|\leq K$

** تعمیم حد ترکیب توابع:

فرض کنیم $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، $\lim_{x\to b} f(x)=L$ در این صورت $\lim_{x\to a} fog(x)=L$ اگر و فقط اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $f(b)=L$

2) یک همسایگی محذوف a وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x از آن همسایگی $g(x)\neq b$

حد بی‌نهایت:

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر به ازای هر عدد حقیقی $M>0$ عدد $\delta>0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x که $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $f(x)>M$ گوییم

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

$ax^{n+m}+bx^{n+m-1}+\dots+kx^n \sim kx^n$ $\quad k\neq 0,\ m,n\in\mathbb{N}$ روابط هم‌ارزی مهم :

$\sin x\sim x-\frac{1}{6}x^3$ $\quad \arcsin x\sim x+\frac{1}{6}x^3$ $\quad \sinh x\sim x+\frac{1}{6}x^3$

$\sinh^{-1}x\sim x-\frac{1}{6}x^3$ $\quad \tan x\sim x+\frac{1}{3}x^3$ $\quad \arctan x\sim x-\frac{1}{3}x^3$

$\tanh x\sim x-\frac{1}{3}x^3$ $\quad \tanh^{-1}x\sim x+\frac{1}{3}x^3$ $\quad$ * $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$1-\cosh x\sim -\frac{1}{2}x^2$ $\quad (1+x)^m-1\sim mx$ $\quad$ * $\sqrt[m]{1+x}-1\sim\frac{1}{m}x$

$\left[\frac{1}{x^n}\right]\sim\frac{1}{x^n}$ $\ n\in\mathbb{N}$ $\quad e^x\sim 1+x+\frac{1}{2}x^2$ $\quad$ * $\ln(1+x)\sim x-\frac{1}{2}x^2$

$\lim_{k\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}$ کلی

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$ $\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ $\qquad \boxed{a^x-1\sim x\ln a}$ مهم

$a^x-1=e^{\ln a^x}-1=e^{x\ln a}-1\underset{x\to 0}{\sim}x\ln a+\frac{1}{2}(x\ln a)^2$

مهم $\quad 1-\cos^m x\underset{x\to 0}{\sim}m\frac{x^2}{2}$ $\qquad [x]\underset{x\to\pm\infty}{\sim}x$

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & n \text{ فرد } (a\neq 0)\\ \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & n \text{ زوج } (a>0)\end{cases}$$

رشد توابع :

وقتی $x\to+\infty$ $\longleftarrow$

$x^x\gg[x]!\gg a^x\gg x^n\gg\log_k x$ $\quad a>1,\ n>0,\ 1\neq k>0$

* وضعیت قضیه لاگرانژ داریم :

$f(x)$ در (a,b) [illegible] $\longrightarrow$ $\quad \min f'<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\max f'$

M-Doka

تاریخ / /

موضوع ....

صورت های نامعین نمایی:

اگر مبهم داشتیم مثل 0^0 یا 1^∞ یا ∞^0 به کمک لگاریتم می‌توان به یکی از صور $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل نمود.

$$u^v = e^{\ln u^v}$$

اگر u^v دارای ابهام نمایی باشد، $v\ln u$ یکی از حالات مبهم مقدماتی است که به سادگی قابل حل است

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$$

اگر f^g دارای ابهام 1^∞ باشد می‌توان حاصل حد را از رابطه $f^g \sim e^{g(f-1)}$ محاسبه نمود.

مجانب مایل:

اگر $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(mx+h)\right)=0$، خط $y=mx+h$ را مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ می‌نامند

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad h=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

نکته: در توابع کسری، مجانب قائم را از ریشه‌های مخرج و در توابع لگاریتمی آن را از ریشه‌های آرگومان لگاریتم (عبارت جلوی لگاریتم) یا مبنا جستجو می‌کنیم.

در توابع کسری اگر درجه صورت کوچکتر یا مساوی درجه مخرج باشد، تابع دارای مجانب افقی است

و اگر درجه صورت یکی بیشتر از درجه مخرج باشد، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج ضابطه مجانب مایل است.

در توابع رادیکالی اگر پس از استفاده از هم ارزی، به یک تابع چندجمله‌ای درجه یک برسیم، ضابطه بدست آمده مجانب مایل است

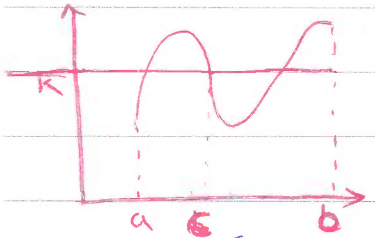
توابع متناوب غیرثابت مانند توابع مثلثاتی، مجانب افقی و مایل ندارند.

توابع کراندار مانند توابع معکوس مثلثاتی، مجانب قائم ندارند.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، $|f(x)|$ نیز در آن نقطه پیوسته است ولی عکس این مطلب صحیح نیست.

*** اگر $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه برای تعیین نقاط ناپیوستگی $[f(x)]$ معادله $f(x)=k$ را حل می‌کنیم ($a \le k \le b$ و $k \in \mathbb{Z}$) نقاط ناپیوستگی در بین این ریشه‌ها می‌باشند. اگر ریشه طول نقطه مینیمم نسبی باشد $[f(x)]$ در آن پیوسته است. در غیر این صورت تابع در آن نقطه ناپیوسته است.

قضیه مقدار میانی:



فرض کنیم تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و k عددی حقیقی باشد به طوری که k بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه حداقل یک عدد حقیقی c در بازه (a,b) وجود دارد که $f(c)=k$

از نظر شهودی خط $y=k$ نمودار تابع را حداقل در نقطه‌ای مانند c بین a و b قطع کند.

قضیه بولتزانو:

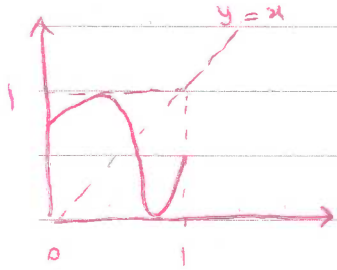
فرض کنیم تابع f در بازه $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ در این صورت عددی مانند c بین a و b هست که $f(c)=0$. از نظر شهودی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور x را قطع کند.

نتیجه: اگر تابع با ضابطه $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a)\cdot f(b)<0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در بازه (a,b) دارد.

*** در معادله $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$ اگر $a_0a_n<0$ باشد آنگاه معادله حداقل یک ریشه مثبت دارد و اگر n عددی زوج باشد معادله حداقل دو ریشه مختلف العلامه دارد.
اگر n عددی فرد و صحیح باشد، معادله حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

*** **مهم:** اگر تابع f پیوسته یک به یک باشد، اکیداً یکنوا است. توابع اکیداً یکنوا (چه پیوسته باشند چه نباشند) حداکثر در یک نقطه محور xها را قطع می‌کنند.

قضیه نقطه ثابت: فرض کنیم تابع f در بازه $[0,1]$ پیوسته و برای هر $x \in [0,1]$، $0 \le f(x) \le 1$، در این صورت حداقل یک c که $0 \le c \le 1$، وجود دارد که $f(c)=c$. از نظر شهودی این قضیه نشان می‌دهد که نمودار تابع خط $y=x$ را در نقطه‌ای از بازه $[0,1]$ قطع می‌کند.



M-Doka

Subject: Mostafa Rahimi
Year. Month. Date. ( )

فصل پنجم : انتگرال :

1) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ قدر مطلق دارد

2) $\int \sec^2 x\,dx = tg\,x + c$

3) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot g\,x + c$

3) $\int \sec x\,tg\,x\,dx = \sec x + c$

4) $\int \csc x\,\cot g\,x\,dx = -\csc x + c$

5) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + tg\,x| + c = \ln|tg(x/2 + \pi/4)| + c$

6) $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot g\,x| + c = \ln|tg\,x/2| + c$

7) $\int tgh\,x\,dx = \ln\cosh x + c$

8) $\int \cot gh\,x\,dx = \ln|\sinh x| + c$

9) $\int \operatorname{sech}^2 x = tgh\,x + c$

10) $\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\cot gh\,x + c$

11) $\int \operatorname{sech} x\,tgh\,x\,dx = -\operatorname{sech} x + c$

12) $\int \operatorname{csch} x\,\cot gh\,x\,dx = -\operatorname{csch} x + c$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin x/a + c = -\operatorname{Arc}\cos\frac{x}{a} + c'$

14) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}tg\,x/a + c = -\frac{1}{a}\operatorname{Arc}\cot g\,\frac{x}{a} + c'$

15) $\displaystyle \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,sec}\left|\frac{x}{a}\right| + c = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arccos}\left|\frac{a}{x}\right| + c$

16) $\displaystyle \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + c$

17) $\displaystyle \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + c$

پرانتز

18) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

قدرمطلق

19) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

20) $\displaystyle \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c = \begin{cases} \frac{1}{a}\,\mathrm{tgh}^{-1}\frac{x}{a} + c' & x< \\ \frac{1}{a}\,\mathrm{cotgh}^{-1}\frac{x}{a} + c' & x> \end{cases}$

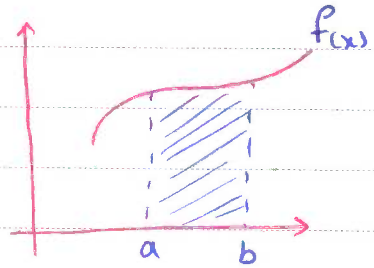
21) $\displaystyle \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

22) $\displaystyle \int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

23) $\displaystyle \int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}\left(x\ln x - x\right) + c$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



مجموع ریمان :

$$R_n(f)= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

طول هر زیربازه

$$\boxed{L_n(f) \le R_n(f) \le U_n(f)} \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

قضیه: f روی $[a,b]$ پیوسته است. اگر M و m ماکزیمم و مینیمم مطلق f روی این بازه باشد داریم:

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

یعنی وقتی یک انتگرال را از ما خواستند می‌توانیم ماکزیمم و مینیمم آن تابع را حساب کنیم و در طول بازه ضرب کنیم. حدود انتگرال بدست می‌آید.

قضیه مقدار میانگین در انتگرال:

اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، عددی c ای وجود دارد که در بازه (a,b) در رابطه زیر صدق کند:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)}$$

مقدار متوسط یک تابع:

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} \longleftarrow$$ مقدار متوسط

اگر k مقدار متوسط f باشد داریم:

$$\boxed{\int_a^b k\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ویژگی انتقال (بسیار مهم):

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx &= \int_a^b f(x+c)\,dx \\ \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx\end{aligned}}$$

فشردگی و کشیدگی:

$$\boxed{\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx}$$

دوره تناوب:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{a+KT}^{b+KT} f(x)\,dx \\ \int_0^{KT} f(x)\,dx &= K\int_0^T f(x)\,dx\end{aligned}}$$

$T \leftarrow$ دوره تناوب

$K \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Exp}}$ $\int_c^{a+c} f(x)\,dx$

c دوره تناوب است پس $f(x\pm c)=f(x)$ داریم

$$\int_{c-c}^{a+c-c} f(x+c)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

نکته: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_0^{a/2} f(a-x)\,dx$

نکته 2: اگر تابع f نسبت به خط $x = a/2$ تقارن داشته باشد داریم

$$f(a-x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^{a/2} f(x)\,dx}$$

نکته 3: اگر تابع f نسبت به نقطه $(a/2\,,\,0)$ تقارن داشته باشد داریم

$$f(a-x) = -f(x) \Rightarrow \boxed{\int_0^a f(x)\,dx = 0}$$

$\boxed{\text{EXP}}$ $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx \longrightarrow a = \pi/2$

$$f(a-x) = \cos^3 2(\pi/2 - x) = \cos^3(\pi - 2x) = -\cos^3 2x = -f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx = 0}$$

نکته معروف!!

$$\int_0^{m\pi} \cos^{2n-1} x\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^{2m\pi} \cos^{2n-1} x\,dx = 0$$

$$\int_0^{2m\pi} \sin^{2n-1} x\,dx = 0 \qquad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

نکته مهم :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx}$$

$\boxed{\text{EXP}}$ $\underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx}_{I} \Rightarrow a = \pi/2 \Rightarrow$

$$f(a-x) = f(\pi/2 - x) = \cos^m x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x} = 2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} 1\,dx = 2I \Rightarrow 2I = \pi/2 \Rightarrow \boxed{I = \pi/4}$$

نکته :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx}$$

فرمول واقعا مهم :

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F'(x) = g'(x)\,f(g(x)) - h'(x)\,f(h(x))}$$

درحالت کلی :

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t,x)\,dt =$$

$$= \boxed{g'(x)\,f(g(x),x) - h'(x)\,f(h(x),x) + \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt}$$

Exp $\frac{d}{dt}\int_0^t e^{(t-\tau)^2}\,d\tau = 1e^{(t-t)^2} + \int_0^t 2(t-\tau)e^{(t-\tau)^2}\,d\tau$

$= 1 - e^{(t-\tau)^2}\Big|_0^t = 1 - e^0 + e^{t^2} = \boxed{e^{t^2}}$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

تذکر: اگر انتگرال شامل مجموع چند رادیکال با فرجهای متفاوت باشد اما عبارات زیر رادیکال یکسان باشند بهتر است رادیکالی با فرجه ک.م.م فرجه‌ها را u فرض کرده و از روش تغییر متغیر استفاده کنیم.

Exp $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx \Rightarrow u = \sqrt[4]{x} \Rightarrow 4u^3\,du = dx \Rightarrow \dots$

روش جزء به جزء 3

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du + c}$$

معمولاً چند جمله‌ای ها ← u فرض می‌شوند

اگر معکوس مثلثاتی، معکوس هیپربولیک و لگاریتم داشتیم ← u فرض می‌شوند

در روش ضربه‌ضربه سعی شود از جدول مشتق و انتگرال استفاده شود. هرجا لازم شد می‌توانیم جدول را ببریم و به صورت انتگرال ادامه را بنویسیم:
فقط حواسم باشه یکی درمیون ضرب‌ها منفی مثبت می‌شود

EXP $\int x^2 e^x dx$

مشتق	انتگرال
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x)e^x + \int (2) e^x dx + C}$$

انتگرال‌های به صورت $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$:

اگر n فرد و مثبت بود ← یک $\sin x$ یا $\cos x$ از تابع جدا کرده و بقیه را به کمک اتحاد $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ به شکل نسبت دیگر تبدیل می‌کنیم

اگر n زوج و مثبت بود ← با استفاده مکرر از $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ توان را کاهش می‌دهیم

EXP $\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{2\pi} \cos x \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos x (1-\sin^2 x) dx$

$\Rightarrow u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \dots$

تذکر: انتگرال توان فرد sin یا cos در یک دوره تناوب صفر است.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^{2n-1} x dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n-1} x dx = 0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال های به صورت $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$:

① اگر m یا n عددی فرد باشد ← مثل توان های فرد قاعده قبل

② اگر m و n هردو زوج باشند ← همراه با $\sin$ یا همراه با $\cos$ تبدیل می‌کنیم

③ اگر $m+n$ زوج و منفی باشد ← تغییر متغیر $u=tgx$ یا $u=\cot gx$

گاهی اوقات ← $\sin x = tg x \cos x$

$\boxed{EXP1}$ $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x} dx$

$\Rightarrow u=\cos x \Rightarrow \dots$

$\boxed{EXP2}$ $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \Rightarrow m+n=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = tg x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \dots$

انتگرال های به صورت $\int tg^n x\, dx$ و $\int \cot g^n x\, dx$:

توان های با 2، 4، 6 و ... واحد کم از تابع تحت انتگرال را مرتباً اضافه و کم می‌کنیم تا به تابعی برسیم که انتگرال آن را بدانیم. در ادامه با دسته‌بندی دو به دو از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$\int_0^{\pi/4} tg^6 x\, dx = \int_0^{\pi/4} (tg^6 x + tg^4 x - tg^4 x + tg^2 x - tg^2 x + 1 - 1) dx$

$= \int_0^{\pi/4} \left(tg^4 x(1+tg^2 x) - tg^2 x(1+tg^2 x) + (1+tg^2 x) - 1 \right) dx$

$\Rightarrow u = tg x \Rightarrow \dots$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال های بصورت $\int \frac{dx}{\sin^{2n}x \cos^{2n}x}$:

با استفاده از فرمول های $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2 x$ و $\frac{1}{\sin^2 x} = 1+ctg^2 x$ قابل حل است.

انتگرال ها به صورت $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$:

برای آنها از تغییر متغیر $u = tg\frac{x}{2}$ ، و از اتحادهای $\cos x = \frac{1-tg^2 x/2}{1+tg^2 x/2}$
و $\sin x = \frac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2 x/2}$ استفاده شود.

EXP $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$

$u = tg\,x/2 \Rightarrow du = 1/2\,(1+tg^2 x/2)\,dx$

$$\Rightarrow \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\frac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2 x/2}} = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{1}{tg\,x/2} \times \frac{1+tg^2 x/2}{2}\,dx = \dots$$

انتگرال ها به صورت $\int_a^b [f(x)]\,dx$

نقاطی را تعیین می کنیم که $f(x)$ در آن صحیح است، و بازه t های مختلف تقسیم می کنیم
و انتگرال را محاسبه می کنیم.

EXP $\int_0^{100} [x] = \left[\int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \dots + \int_{99}^{100} [x]\,dx \right]$

$= \dots$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

انتگرال های به صورت $\int tg^m x \sec^n x \, dx$ و $\int Cotg^m x \csc^n x \, dx$:

① اگر n صحیح و زوج باشد ← $\sec^2 x$ را جدا کرده و بقیه عبارات را برحسب tgx می نویسیم و از تغییر متغیر $u = tgx$ استفاده می کنیم

توجه: $\frac{d}{dx} tgx = 1 + tg^2 x = \sec^2 x$

② اگر m و n صحیح و فرد باشند ← عبارت $\sec x . tgx$ را جدا کرده و بقیه عبارات را برحسب $\sec x$ می نویسیم و از تغییر متغیر $u = \sec x$ استفاده می کنیم.

توجه: $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \, tgx$

③ اگر n صحیح و فرد باشد و m صحیح و زوج باشد تابع را برحسب $\sec x$ بازنویسی می کنیم و به کمک روش جزء به جزء مسئله را حل می کنیم.

EXP) $\int tg^3 x \sec^4 x \, dx$

$$\int tg^3 x \sec^2 x . \sec^2 x \, dx = \int tg^3 x (1 + tg^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$u = tgx \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx \Rightarrow \dots$$

EXP) $\int \sec^5 x \, tg x \, dx$

$$\int \sec^4 x . \sec x \, tgx \, dx \Rightarrow u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \, tg x \, dx$$

$$\Rightarrow \dots$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* انتگرال های جبری که با استفاده از انتگرال های مثلثاتی حل می شوند:

① اگر تابع شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد می توانیم از تغییر متغیر $x=a\sin t$ استفاده کنیم. بهتر است محدوده t را $[-\pi/2, \pi/2]$ انتخاب کنیم.

② اگر تابع شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ یا a^2+x^2 باشد $\longleftarrow$ تغییر متغیر $x=a\,tg\,t$

③ اگر تابع شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد $\longleftarrow$ $x=a\sec t$

بازه‌ها
$$\begin{cases} \text{if } x\geq a \Rightarrow 0\leq t<\pi/2 \\ \text{if } x<-a \Rightarrow \pi\leq t<3\pi/2 \end{cases}$$

نکته: گاهی به جای $x=a\,tg\,t$ و $x=a\sec t$ می توان به ترتیب از تغییر متغیرهای $x=a\sinh t$ و $x=a\cosh t$ استفاده کرد.

$\boxed{\text{EXP}}$ $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}$

$x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\,dt$, $x=0 \Rightarrow t=0$

$x=1 \Rightarrow t=\pi/2$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, \cos^2 t\, dt = \cdots$$

$\boxed{\text{EXP}}$ $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

$x=\sec t \Rightarrow dx=\sec t\, tg\, t\, dt$ $\qquad x=-1 \Rightarrow t=\pi$

$x=-2 \Rightarrow t=4\pi/3$

$$\Rightarrow \int_{4\pi/3}^{\pi} \frac{tg\,t}{\sec t}\sec t\, tg\, t\, dt = \int_{4\pi/3}^{\pi} (tg^2 t+1-1)\,dt = \cdots$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش های عددی در تقریب انتگرال معین:

الف) روش مستطیلی:

توجه (y_0 نیست) ⟵ $\int_a^b f(x)dx = \Delta x(y_1+y_2+\cdots+y_K)$

ب) روش ذوزنقه‌ای:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)$$

ضریب 2 ندارد

ج) روش سیمپسون:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$\boxed{n=2K}$

د) بسط تیلور:

اگر بازه انتگرال گیری کوچک باشد از بسط تیلور استفاده شود

EXP $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ *مقدار انتگرال رو برو به روش ذوزنقه با 4 فاصله؟

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = 1/4$$

$y(0) = f(1) = 1$, $y_1 = f(1{,}25) = 4/5$, $y_2 = f(1{,}5) = \frac{2}{3}$

$y_3 = f(1{,}75) = \frac{4}{7}$, $y_4 = f(2) = 1/2$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{8}{5}+\frac{4}{3}+\frac{8}{7}+1/2\right) = \boxed{0{,}697}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

EXP $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ (تا سه رقم اعشار)

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) dx = \boxed{0,946}$$

انتگرال ناسره :

$I(b) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad b \to +\infty$ ← انتگرال ناسره نوع اول

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx$$

اگر همگرا باشند ← آنگاه همگرایی

* اگر f همگرا و g واگرا باشد $\int f+g$ واگرا است

اگر هر دو واگرا باشند ← $\int f+g$ ممکن است همگرا باشد یا واگرا

نکته مهم : $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$ یا $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{x^s}\, dx$ همگراست اگر $s > 1$ $(b<0,\ a>0)$

انتگرال ناسره نوع دوم :

اگر $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ← $I(x) = \int_x^b f(t)\, dt$ ← ناسره نوع دوم

$$a < x \le b$$

* اگر حد زیر برقرار باشد انتگرال همگراست

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} I(x) = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt = \int_a^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b^-} f(t)\,dt}$$

نکته مهم: $\int_0^a \frac{1}{x^t}dx$ همگراست اگر $t<1$ (اگر $t>0$ باشد انتگرال ناسره است)

$\boxed{\text{Exp}}$ $g(b) = \int_{-1}^{b} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \lim_{b\to 1^-} g(b) = ?$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{\text{فرد}} = \dots$$

نکته مهم: انتگرال $\int_{x_0}^{a} \frac{dx}{(x-x_0)^t}$ یا $\int_{b}^{x_0} \frac{dx}{(x-x_0)^t}$ همگراست اگر $t<1$

تعمیم آزمون مقایسه حدی:

اگر $\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ هر دو انتگرال ناسره نوع اول یا ناسره نوع دوم باشند و در اطراف نقطه ناسرگی، مانند c (که می‌تواند ∞ باشد) هر دو مثبت بوده و $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ آنگاه:

(الف) اگر $L \neq 0, \infty$ هر دو انتگرال یا همگرا هستند یا واگرا

(ب) اگر $L=0$، $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست

(ج) اگر $L=\infty$، $\int_a^b g(x)dx$ واگرا باشد، $\int_a^b f(x)dx$ نیز واگراست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

همگرایی مشروط و مطلق:

① اگر $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرا باشد ← همگرایی مطلق

② اگر $\int_a^b |f(x)|dx$ واگرا باشد اما انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگرا باشد ← همگرایی مشروط

Result اگر $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرا باشد ← $\int_a^b f(x)\,dx$ نیز همگراست ولی عکس آن صادق نیست

توابع گاما و بتا:

$$\boxed{\text{تابع گاما} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt}$$

① $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ ② اگر $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ← $\Gamma(x+1) = x!$

③ $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

④ اگر $0 < x < 1$ ← $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

⑤ $$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^{P}\, dt = \frac{\Gamma(P+1)}{s^{P+1}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تابع بتا:

$$\boxed{\beta = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}t\,\cos^{2y-1}t\,dt = \frac{1}{2}\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{2\,\Gamma(x+y)} \qquad x,y>0 \quad (2)$$

تاریخ / /
موضوع ....

کتاب گاج

فصل پنجم : انتگرال دوگانه :

اگر ناحیه انتگرال گیری مستطیلی باشد

$$Q=\{(x,y)\mid a\le x\le b \,,\, c\le y\le b\}$$

$$\boxed{\iint_Q f(x)g(y)\,dA=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)}$$

نکته واقعاً مهم ؛ اگر تابع تحت انتگرال نسبت به x فرد باشد یعنی $f(-x,y)=-f(x,y)$ و ناحیه انتگرال گیری نسبت به محور $x=0$ (محور y ها) متقارن باشد :

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dA=0}$$

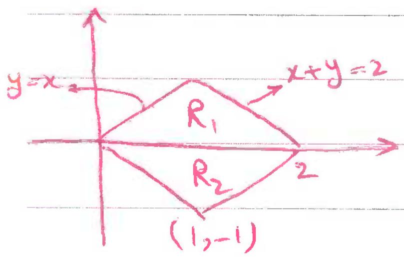
EXP $\iint_R (x^3y^3+xy^2)\,dxdy=0$

اگر انتگرال ده نسبت به x زوج باشد یعنی $f(-x,y)=f(x,y)$ و ناحیه انتگرال گیری نسبت به محور $=0$ متقارن باشد، با فرض اینکه Q_1 بخشی از Q به ازای $x\ge 0$ یا $x\le 0$ است، داریم :

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dA=2\iint_{Q_1} f(x,y)\,dA}$$

EXP

* حاصل انتگرال $\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy$ وقتی R مربع به رئوس $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(2,0)$ و $(1,-1)$ ناحیه انتگرال گیری است را بیابید؟



چون R نسبت به y زوج است $\Rightarrow$ انتگرال $=2\iint_{R_1}(x^2+y^2)\,dxdy$

$$=2\int_0^1\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\,dxdy=\boxed{\frac{8}{3}}$$

M-Deka

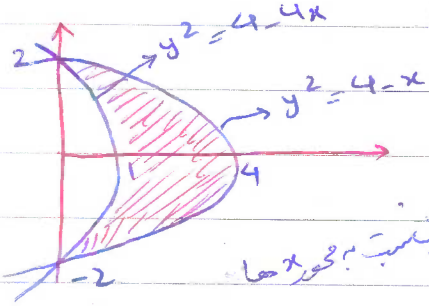
تاریخ / /
موضوع ....

نکته تستی ۳: وقتی بازه‌ی انتگرال ا‌ست منفی مثلاً $[-1,1]$ داده بود چک کنیم که آیا در قسمت منفی یا در قسمت مثبت ممکن است بازه‌ی انتگرال متفاوت در بیاید.

نمایش دیگر انتگرال دوگانه:

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\,dy\,dx \equiv \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\,dy$$

نکته: اگر مساحت محدود بین دو منحنی سؤال شد:



$$S=\int_{-2}^{2}\int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\,dy$$

متقارن نسبت به محور x ها $\rightarrow$

$$S=2\int_0^2\int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\,dy$$

نکته: اگر حجم محصور بین سطح $z=x^2+y^2$ و ناحیه $D=\{(x,y): 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}$ سؤال شد:

$$\text{حجم}=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

یادآوری ۳

حجم بیضی‌گون $\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \rightsquigarrow \boxed{V=\frac{4}{3}\pi abc}$

M-Doka

Mostafa Rahimi

نکته: اگر چگالی و جرم ورق و ... سوال شد:

جرم کل $M = m(S) = \iint_S \delta(x,y)\,dx\,dy$ نشان دهنده جرم در واحد سطح ← چگالی

$$\frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}} = \frac{\iint_S \delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}$$ ← چگالی متوسط ورق

EXP) if $\delta(x,y) = x+y+2$ (چگالی) ← $y=3x,\ x=2$ و شکل محدود به

جرم ؟

حل) جرم $M = \iint \delta(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{3x} (x+y+2)\,dy\,dx = 32$

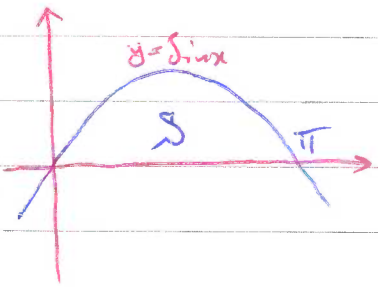
نکته: اگر در مورد مرکز ثقل یک سطح سوال شد:

$$\boxed{\bar{x}\,a(S) = \iint_S x\,dx\,dy} \quad , \quad \boxed{\bar{y}\,a(S) = \iint_S y\,dx\,dy}$$

$a(S)$ ← مساحت S

$(\bar{x},\bar{y})$ ← مرکز ثقل

EXP) مرکز ثقل ناحیه ی $y=\sin x$, $[0,\pi]$ در بازه



$$a(S) = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} dy\,dx = 2$$

$$\frac{1}{a(S)}\iint y\,dA = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \boxed{\pi/8}$$

$\bar{y}$

تاریخ / /
موضوع ....

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه :

مثلاً اگر حاصل انتگرالی را در ناحیه محدود به 4 معادله خواستند می‌توانیم از روش دترمینان ژاکوبی استفاده کنیم :

$$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(X(u,v), Y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv}$$

$$\text{ژاکوبی } J = \cfrac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

EXP

مقدار $\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy$ در ناحیه R محصور بین $xy=2$ ، $xy=4$ ، $y^2=x$ ، $y^2=3x$ ؟

$u = xy$ ، $v = \frac{y^2}{x}$

$\hookrightarrow u = 2, 4$ $\qquad \longrightarrow v = 1, 3$

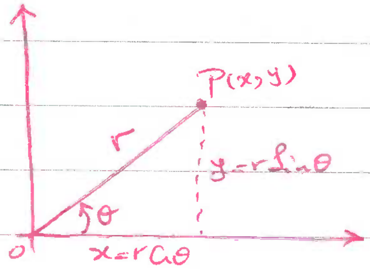
$$\text{ژاکوبی پس} = \cfrac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \cfrac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}} = \cfrac{1}{\frac{3y^2}{x}} = \boxed{\frac{1}{3v}}$$

$$\text{انتگرال} = \int_1^3 \int_2^4 \frac{1}{v^2} \left|\frac{1}{3v}\right| du\,dv = \frac{1}{3}\left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_2^4 du\right) = \frac{8}{27}$$

M-Doka

تاریخ / /
موضوع ....

فصل هفتم: مختصات قطبی:



$x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

یک نقطه بیش از یک نمایش قطبی دارد.

r می‌تواند منفی نیز باشد.

نحوه ی نمایش قطبی:

(ρ, θ) یا (r, θ) $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

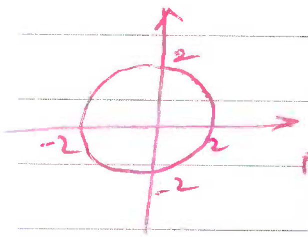
تقارن منحنی قطبی:

اگر با تبدیل θ به $-\theta$ و یا θ به $\pi-\theta$ و r به $-r$ ضابطه تغییر نکند ← متقارن نسبت به x

اگر با تبدیل θ به $\pi-\theta$ یا θ به $-\theta$ و r به $-r$ ضابطه تغییر نکند ← منحنی نسبت به محور y متقارن

اگر با تبدیل r به $-r$ و یا θ به $\pi+\theta$ ضابطه تغییر نکند، منحنی نسبت به مبدا مختصات متقارن

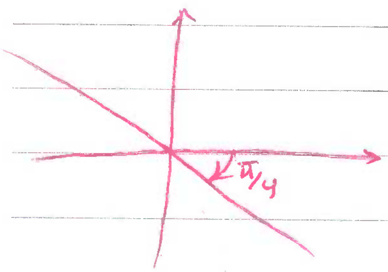
منحنی های قطبی مهم:



1) $r = r_0$: دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $|r_0|$

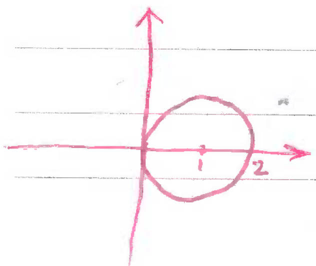
$r = -2$

2) $\theta = \theta_0$: خطی است گذرنده از مبدا که با جهت مثبت محور x زاویه θ_0 می‌سازد.



$\theta = -\pi/4$

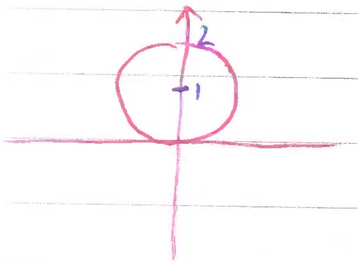
3) $r = 2a\cos\theta$: دایره‌ای است به مرکز $(a, 0)$ و شعاع $|a|$



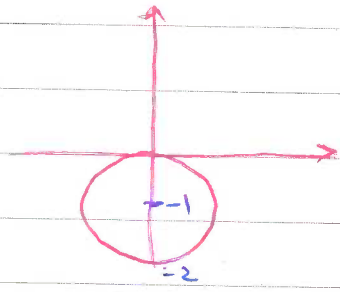
$r = 2\cos\theta$

M-Doka

(4) $r=2a\sin\theta$: نمایش دایره است به مرکز $(0, a)$ و شعاع $|a|$



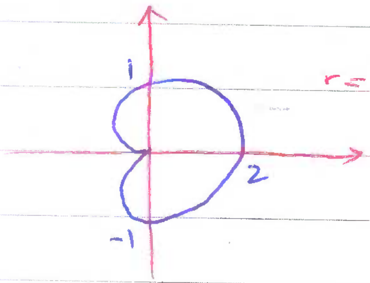
$r=2\sin\theta$



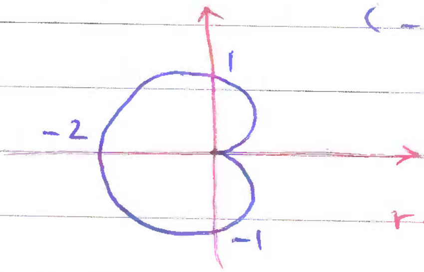
$r=-2\sin\theta$

(5) $r=a(1\pm\cos\theta)$: نمایش دلوار یا دلنما یا کاردیوئید (افقی) به رأس $(2a, 0)$

یا $(-2a, 0)$

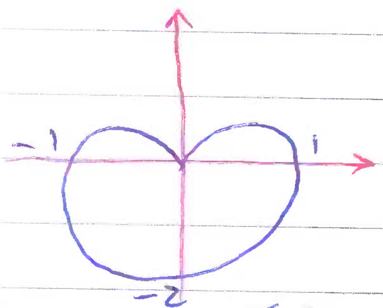


$r=1+\cos\theta$

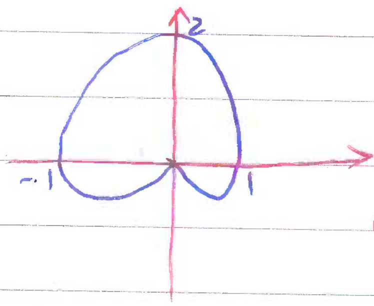


$r=1-\cos\theta$

(6) $r=a(1\pm\sin\theta)$: نمایش دلوار قائم به رأس $(0, 2a)$ یا $(0, -2a)$



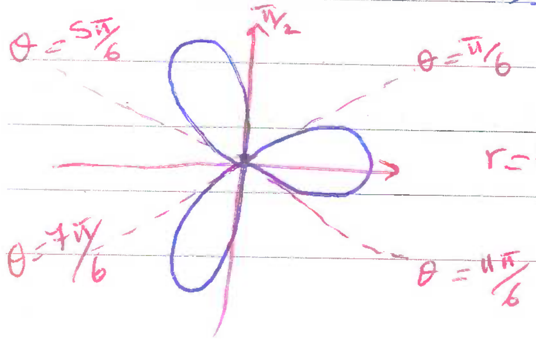
$r=1-\sin\theta$



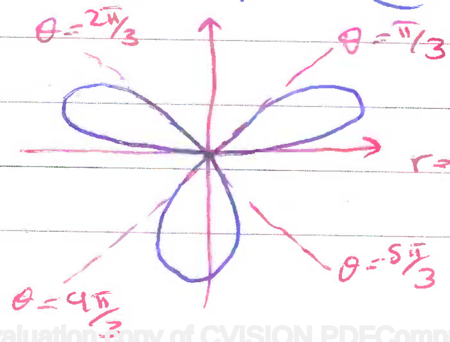
$r=1+\sin\theta$

(7) $r=a\cos n\theta$ یا $r=a\sin n\theta$ ، $n\neq 1$: نمایش یک گل رز است. به ازای

n زوج، 2n برگ و به ازای n فرد n برگ دارد.



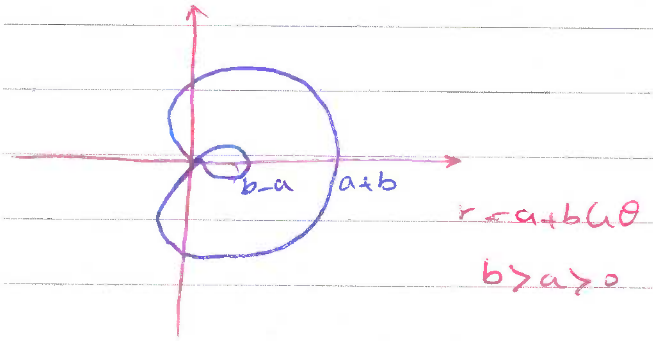
$r=\cos3\theta$

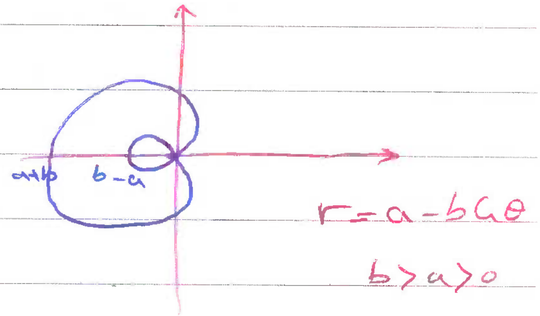


$r=\sin3\theta$

M-Doka

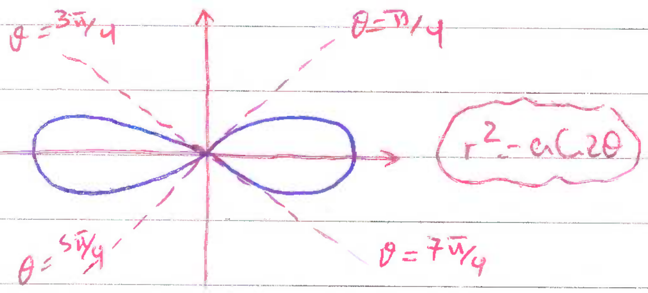
⑧ $r = a \pm b\cos\theta \ , \ 0 < a < b$: نمایش یک لیماسون افقی است.

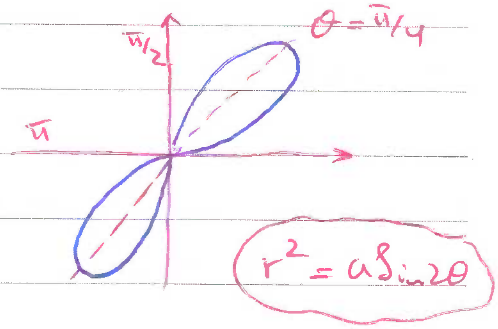




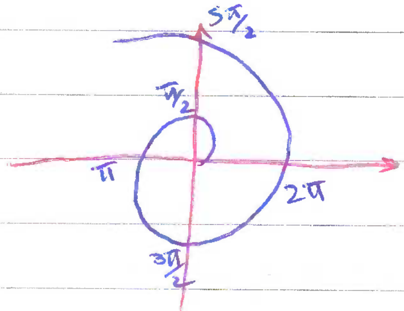
⑨ $r = a \pm b\sin\theta \ , \ 0 < a < b$ ـــــ نمایش لیماسون قائم

⑩ $r^2 = a\cos 2\theta$ یا $r^2 = a\sin 2\theta \ , \ a > 0$ ـــــ نمایش لمنیسکات یا پروانه است





⑪ $r = a\theta$: نمایش پیچ (فنر) ارشمیدس



$r = \theta$

تاریخ / /
موضوع ....

راه حل فوق: برای بدست آوردن محور تقارن یک منحنی می توان روش زیر را رفت:

مثلاً $r = \sin 3\theta$ را می خواهیم محور تقارن آن را بدست بیاوریم؟

فرض می کنیم $\theta = \theta_0$ محور تقارن آن باشد داریم:

$$\sin(6\theta_0 - 3\theta) = \sin(3\theta) \Rightarrow \begin{cases} 6\theta_0 - 3\theta = 2k\pi + 3\theta \rightarrow \text{غ ق ق} \\ 6\theta_0 - 3\theta = (2k+1)\pi - 3\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\theta_0 = \frac{(2k+1)\pi}{6}}$$

چگونه معادلات مختلف یک منحنی را بدست آوریم؟

جا گذاری کردن $((-1)^k r, k\pi + \theta)$، $k \in \mathbb{Z}$ به جای (r, θ)

$$r = 1 + \cos\theta \Rightarrow r = 1 + \cos(\pi + \theta) \Rightarrow \boxed{r = -1 + \cos\theta}$$

نکته مهم: دقت شود ممکن است یک نقطه روی معادله ی منحنی نباشد ولی روی شکل معادله ی دیگر منحنی ممکن است جواب دهد (توجه!!)

نقاط تلاقی دو منحنی قطبی:

1) بررسی شود آیا مبدا مختصات یک نقطه تلاقی هست یا خیر؟ $\begin{cases} r = g(\theta) = 0 \\ r = f(\theta) = 0 \end{cases}$

2) بررسی شود آیا معادله $f(\theta) = (-1)^k g(k\pi + \theta)$ ریشه دارد یا نه؟؟

تاریخ / /
موضوع ....

Mostafa Rahimi

شیب خط مماس بر منحنی قطبی:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\overbrace{r'\sin\theta + r\cos\theta}^{(r\sin\theta)'}}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \boxed{\frac{r'\operatorname{tg}\theta + r}{r' - r\operatorname{tg}\theta}}$$

که از همین شیب می‌توان معادله خط مماس و یا نقاط اکسترمم را حساب کرد.

طول قوس:

$$\boxed{ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta}$$

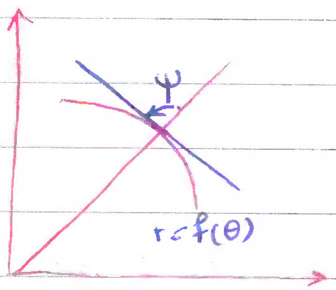
در آخر انتگرال می‌گیریم

نکته جالب: اگر تکه‌ای از یک رویه حول محوری دوران کند مساحتی که به وجود می‌آورد برابر است با:

$$S_x = 2\pi \int y\, ds$$

حول محور x دوران کردیم

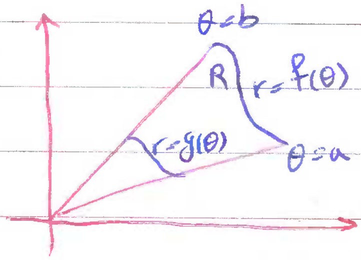
زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر هم:



جهت پادساعتگرد:

$$\boxed{\operatorname{tg}\psi = \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)} \qquad 0 < \psi \leq \pi}$$

انتگرال مساحت بین دو منحنی قطبی:



$$\boxed{S = a(R) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f^2(\theta) - g^2(\theta)\right) d\theta}$$

M-Doka

تاریخ / /
موضوع ....

فصل هشتم: اعداد مختلط:

$z = x + iy \longrightarrow Im(z)$ موهومی

$x \longrightarrow Re(z)$ حقیقی

$$\boxed{i = \sqrt{-1} \Downarrow i^2 = -1}$$

$\bar{z} = x - iy \longrightarrow$ مزدوج z

$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \xrightarrow{\text{یعنی}} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ، $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \Rightarrow \boxed{\overline{z^n} = \bar{z}^n}$: مثلا

دقت: حواسم باشه اگر عدد مختلط زیر رادیکال رفت، می‌شه به نوعی اون رو از زیر رادیکال بیرون آورد!!

EXP $\sqrt{-3-4i} = \sqrt{(1-2i)^2} = \boxed{\pm(1-2i)}$

تعبیر هندسی (مهم):

① $|z - z_0| = r > 0 \Longleftarrow$ دایره‌ای به مرکز z_0 به شعاع r

② $|z - z_1| + |z - z_2| = r > 0$:

الف) $|z_1 - z_2| < r \longleftarrow$ بیضی با کانون‌های z_1 و z_2 و قطر بزرگ r

ب) $|z_1 - z_2| = r \longleftarrow$ پاره‌خط

ج) $|z_1 - z_2| > r \longleftarrow$ تهی

M-Doka

Subject:
Year . Month . Date . ( )

3) $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big| = r > 0$:

الف) $|z_1-z_2| > r$ ⟵ هذلولی با کانون های z_1، z_2 و قطر r

ب) $|z_1-z_2| = r$ ⟵ دو نیم خط

ج) $|z_1-z_2| < r$ ⟵ تهی

4) اگر $r=0$ یعنی $|z-z_1| = |z-z_2|$ ⟵ عمودمنصف پاره خط z_1z_2

5) $|z-z_1| - |z-z_2| = r$ ⟵ یک شاخه هذلولی

⟵ یک نیم خط

6) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k > 0$:

الف) اگر $k=1$ ⟵ عمودمنصف پاره خط z_1z_2

ب) اگر $k \neq 1$ ⟵ دایره ای به شعاع $|z_2-z_1|\dfrac{k}{|k^2-1|}$

7) $\begin{cases} z = tz_2 + (1-t)z_1 \\ z = z_1 + (z_2-z_1)t \end{cases}$ ⟵

$0 \leq t \leq 1$ ⟵ پاره خط

بدون محدودیت ⟵ معادله خط z_1z_2

نمایش قطبی اعداد مختلط

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \Longrightarrow z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

r ← قدر مطلق یا طول یا اندازه z

θ ← زاویه شعاع حامل نقطه z یا شناسه یا آرگومان z

نکته: θ منحصر به فرد نیست ← $2k\pi + \theta$

اگر θ در بازه $(-\pi, \pi]$ باشد ← آرگومان اصلی $\arg(z)$

* اختصار → $\cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow \operatorname{cis}\theta$

نکته مهم → $z = x+iy \Longrightarrow e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

شکل قطبی → $\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$\boxed{z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad n\in\mathbb{Z}}$ نکته حیاتی!!!

* $|\arg z - \arg(-z)| = \pi$ و $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$

$\operatorname{Arg}(z)$ → آرگومان اصلی z

$\arg(z)$ → آرگومان z

EXP $z = 1 - i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ tg\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = -\pi/4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}}$

ریشه های عدد مختلط :

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ cis\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)}$$

از این رابطه n مقدار بدست می آید که رئوس یک n ضلعی منتظم هستند و فاصله هر یک از آنها از مبدا برابر $\sqrt[n]{r}$ و زاویه بین هر دو ریشه متوالی $\frac{2\pi}{n}$ است .

EXP $z^4 + i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1 \times cis(-\pi/2)} = \sqrt[4]{1}\ cis\ \frac{2k\pi - \pi/2}{4}$

$$= \boxed{cis\ \frac{(4k-1)\pi}{8}}$$

لگاریتم اعداد مختلط :

$$\boxed{\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta}$$

نکته تست : اگر در سوال گفته بود روی نیمساز اول یعنی $x = y$ است پس داریم

$$x + iy = x + ix = \boxed{re^{i\pi/4}}$$

لازم می دانم از جناب آقای مهندس غفاری بابت اسکن
خلاصه این درس تشکر ویژه و صمیمانه داشته باشم

اگر این جزوه نقشی در موفقیت شما در

کنکور کارشناسی ارشد و دکتری داشت،

لطفا ما را از دعای خیر خود

بی نصیب نگذارید.

با تشکر

مصطفی رحیمی

nce.rahimi@yahoo.com